La Función Exponencial y Logarítmica

Una Propuesta para el Aprendizaje

María Inés Ortega Arcega
Elena Dmitrievna Nesterova
José Trinidad Ulloa Ibarra
David Zamora Coloca
Jonathan Jair González Ortega

Universidad Tecnocientífica del Pacífico S.C.
UTP
Editorial

La función exponencial y logarítmica una propuesta para el aprendizaje

Editorial

La función exponencial y logarítmica una propuesta para el aprendizaje es una publicación editada por la Universidad Tecnocientífica del Pacífico, S.C.
Calle 20 de Noviembre, 75, Col. Mololoa,
C.P. 63050. Tel (311)212-5253. ***Abril 2018***
www.tecnocientifica.com
Primera Edición

ISBN

978-607-9488-70-3

La función exponencial y logarítmica una propuesta para el aprendizaje

Autores

María Inés Ortega Arcega
Elena Dmitrievna Nesterova
José Trinidad Ulloa Ibarra
David Zamora Coloca
Jonathan Jair González Ortega

Editor

Diseño de portada

Gisela Juliet Estrada Illán

Índice

Marco Contextual 6
Introducción 6
Problema de investigación 7
Justificación 7
Contexto 8
Objeto de estudio 9
Antecedentes 9
Objetivo 10
Hipótesis 11
Metas 11
Tipo de estudio 11
Muestra 12
Duración 12
Fuentes de información 12

Marco Conceptual 13
Definiciones Básicas 13
Mapa Conceptual 15
Preguntas de Investigación 15
Planteamiento de la pregunta principal 16
Alcances y límites 16

Marco Teórico 17
Fundamentación histórica 17
Perspectivas teóricas 23

Marco Metodológico 26
Procedimientos 26
Muestreo 26
Estadísticos 27
Técnicas para la recopilación y análisis de los datos 27
Diseño de materiales 28

Marco Operativo 29
Instrumentos de evaluación 29

Experimentación 29
Obtención y procesamiento de datos 31
Recursos necesarios 32

Resultados Experimentales 33
Análisis del desarrollo de aprendizaje 33
Análisis del resultado final del aprendizaje 36
Análisis de las respuestas al cuestionario de opinión 38
Resultados estadísticos 40

Conclusiones 45

Bibliografía 47

Apéndice A. Cronograma de actividades 50
Apéndice B. Manual de Winplot 54
Apéndice C. Cuaderno de trabajo 61
Apéndice D. Lecturas: Funciones exponencial y logarítmica 70

Marco Contextual

Introducción

En este trabajo se reportan los resultados de la aplicación de la propuesta didáctica para la enseñanza de las funciones exponencial y logarítmica con empleo de diferentes registros de representación semiótica (verbal, algebraico y gráfico). La experimentación se realizó en el mes de mayo del 2007, durante 8 sesiones de 2 hrs. cada una, con los estudiantes del grupo único del tercer semestre de la carrera de Matemáticas del Área de Ciencias Básicas e Ingenierías de la Universidad Autónoma de Nayarit (UAN).

La propuesta se basó en las ideas de la teoría constructivista (Ernest, 1994; Pozo, 1999; Anderson, Reder, y Simon, 2001, entre otros) y la teoría de representaciones (Duval, 1998; Hitt, 1998; Lupiáñez, y Moreno, 2001; Tchoshanov, 2002, entre otros). Para desarrollar el aprendizaje y el pensamiento conceptual en los alumnos es importante enfrentarlos a problemas de articulación y traslados entre las distintas representaciones.

Se estudió el proceso de aprendizaje de las funciones exponencial y logarítmica, así también cómo pasan de una representación a otra, como son la verbal, la gráfica y la analítica. Con estas observaciones se identificaron las dificultades y los efectos que producen las actividades con diferentes registros de representación semiótica en el aprendizaje de los alumnos de las funciones exponencial y logarítmica.

Para realizar la experimentación se elaboraron materiales didácticos que se diseñaron de acuerdo al constructivismo y a la teoría de Duval (manual para el uso del programa winplot, cuaderno de trabajo y lecturas).

Para determinar si existe una relación lineal entre el nivel logrado por los alumnos en el desarrollo de las actividades con diferentes registros de representación semiótica (variable independiente *x*) y sus resultados de aprendizaje en el tema funciones exponencial y logarítmica (variable dependiente *y*) se examinó en términos del coeficiente de correlación.

Problema de investigación

El problema de investigación estuvo relacionado con del empleo de diferentes registros de representación semiótica en la enseñanza de las funciones exponencial y logarítmica para favorecer el aprendizaje de los alumnos de la Licenciatura en Matemática Educativa de la UAN.

Se estudiaron las dificultades que enfrentaron los alumnos al realizar las actividades con diferentes registros de representación semiótica de las funciones exponencial y logarítmica y los efectos de estas actividades sobre el aprendizaje de los alumnos de la Licenciatura en Matemática Educativa de la UAN.

Justificación

La enseñanza de las matemáticas que prevalece en la Universidad Autónoma de Nayarit consiste en exposición, por parte de profesores, procedimientos algoritmo-algebraicos para resolver problemas, sin llegar a una comprensión plena de los conceptos matemáticos involucrados.

La idea de esta investigación se basó en la búsqueda de los métodos efectivos de la enseñanza y el aprendizaje para que los alumnos logren comprender las funciones exponencial y logarítmica y aplicar sus conocimientos en la solución de problemas.

En las distintas investigaciones (Fennell y Rowan, 2001; Pape y Tchoshanov, 2001; Holmes, 2004; Preston y Garner, 2003; Duval, 1992, 1998; Hitt, 1998, 2003) se han identificado dificultades que enfrentan los estudiantes en los cursos de matemáticas superiores, relacionados con la escasa visualización de los conceptos involucrados. El resultado principal de estas investigaciones es que la utilización y articulación de los diferentes registros de representación semiótica por parte de los estudiantes favorecen el aprendizaje de los conceptos matemáticos.

Contexto

La investigación se realizó en la Licenciatura en Matemática Educativa de la UAN en el curso de cálculo diferencial. El sistema de la licenciatura, es mixto, es decir, sistema abierto y escolarizado. La investigación se aplicó en el sistema escolarizado con alumnos de tercer semestre. El curso consta de cinco unidades funciones, límite de una función, continuidad de una función, diferenciación de las funciones, aplicaciones de las derivadas.

Las funciones exponencial y logarítmica son objetos matemáticos importantes, pues se tiene una amplia variedad de aplicaciones en la misma matemática (ecuaciones diferenciales, transformada de Laplace, etc.) y en diferentes ciencias.

La geología como ciencia requiere del planteamiento de ecuaciones logarítmicas para el cálculo de la intensidad de un evento, tal como es el caso de un sismo. Los astrónomos para determinar una magnitud estelar de una estrella o planeta utilizan ciertos cálculos de carácter logarítmico. La ecuación logarítmica les permite determinar la brillantez y la magnitud. En la física la función logarítmica tiene muchas aplicaciones entre las cuales se puede mencionar el cálculo del volumen en decibeles de un sólido. En algunos elementos radioactivos son de tal naturaleza que su cantidad disminuye con respecto al tiempo, se cumple la ley exponencial   y se dice que el elemento decrece o decae.

El crecimiento poblacional de una región o población en años, parece estar sobre una curva de característica exponencial que sugiere el modelo matemático. En la medicina, muchos medicamentos son utilizados para el cuerpo humano, de manera que la cantidad presente sigue una ley exponencial de disminución. En Matemática Financiera para el cálculo de interés compuesto se emplean las funciones exponenciales.

Objeto de estudio

El proceso de aprendizaje de las funciones exponencial y logarítmica con empleo de diferentes registros de representación semiótica.

Antecedentes

En la enseñanza de las funciones suele dársele más peso a los procedimientos analíticos y de algoritmización, dejando de lado argumentos visuales por la concepción que de la matemática y de su enseñanza se posea, sin considerar, la estructura cognitiva de los estudiantes a los que se dirige. El concepto de función devino protagónico hasta que se le concibe como una fórmula, es decir hasta que se logró la integración entre dos dominios de representación: el álgebra y la geometría. La complejidad del concepto de función se refleja en las diversas concepciones y diversas representaciones con las que se enfrentan los estudiantes y profesores.

Muchos estudiantes muestran una carencia de vinculación coherente de una representación a otra, los que logran vincular al menos dos representaciones y transitar en ambos sentidos entre ellas, presentan elementos de un pensamiento global que le permite mejorar la cognición de un objeto matemático (De la Rosa, 2001).

Lowrie y Russel (2001) estudiaron la relación entre el nivel de complejidad de un problema y las estrategias, visual o no visual, que emplean los alumnos al momento de resolverlos. Encontraron que los alumnos prefirieron métodos visuales para resolver problemas difíciles o nuevos, mientras que utilizaron estrategias no visuales en situaciones menos complicadas o familiares.

La enseñanza en donde el docente es el que trasmite el conocimiento y es mediador entre el alumno y los contenidos asume, al parecer, que las convenciones matemáticas son objetos de memorización; sin embargo, como se ha mostrado para el caso de las convenciones relativas a los exponentes no naturales, este camino no es trivial, debido sobre todo a la búsqueda de coherencia de estudiantes y profesores; coherencia, que parece ser, sólo será posible a través de consideraciones metamatemáticas (Sierra, 2000).

En las investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de funciones Sierra recomienda realizar estudios epistemológicos, didácticos y conceptuales:

1) Las consideraciones metamatemáticas que involucraron su establecimiento.

2) La vida escolar de las convenciones.

3) Las concepciones que estudiantes y profesores posean sobre tales convenciones.

Para el éxito de la coordinación de registros es esencial la discriminación de unidades o de valores pertinentes a la representación semiótica. Duval (1997) sostiene que las representaciones semióticas son aquellas en las cuales la producción no puede hacerse sin la movilización de un sistema semiótico: así las representaciones semióticas pueden ser producciones discursivas (en lenguaje natural, en lenguaje formal) o no discursivas (figuras, gráficos, esquemas).

Objetivo

Describir las dificultades y evaluar los efectos que produce el empleo de diferentes registros de representación semiótica de las funciones exponencial y logarítmica sobre el aprendizaje de los alumnos de la Licenciatura en Matemática Educativa de la UAN.

Hipótesis

Hipótesis alternativa Ha: Las actividades con diferentes registros de representación semiótica, apoyadas con el cuaderno de trabajo diseñado a propósito, producen efecto positivo sobre el aprendizaje de los alumnos de la Licenciatura en Matemática Educativa de la UAN.

Hipótesis nula H_0: Las actividades con diferentes registros de representación semiótica, apoyadas con el cuaderno de trabajo diseñado a propósito, no producen efecto positivo sobre el aprendizaje de los alumnos de la Licenciatura en Matemática Educativa de la UAN.

Metas

1. Identificar las dificultades que enfrentan los alumnos en las actividades con diferentes registros de representación semiótica de las funciones exponencial y logarítmica.

2. Describir los efectos que produce el empleo de diferentes registros de representación semiótica sobre el aprendizaje de los alumnos del segundo semestre de la licenciatura en matemáticas de la UAN.

3. Analizar las opiniones de los alumnos sobre las actividades, materiales y el apoyo del profesor.

4. Realizar el análisis de correlación entre dos variables: las actividades con diferentes registros de representación semiótica de las funciones exponencial y logarítmica (variable independiente x) y el aprendizaje de los alumnos (variable dependiente y).

Tipo de estudio

Para determinar qué efectos producen las actividades con diferentes registros de representación semiótica de las funciones exponencial y logarítmica sobre el aprendizaje de los alumnos se realizó una investigación pre-experimental y transversal con un grupo del tercer semestre de la licenciatura en matemáticas de la UAN.

Se estudió la correlación entre dos variables: las actividades con diferentes registros de representación semiótica de las funciones exponencial y logarítmica (variable independiente x) y el aprendizaje de los alumnos (variable dependiente y). Se aplicó una encuesta para evaluar la contribución de los materiales didácticos empleados, las actividades propuestas y apoyo del profesor en el proceso de aprendizaje

Muestra

La investigación se realizó con el grupo único integrado por 12 alumnos de III semestre de la Licenciatura en Matemáticas en el curso de Cálculo Diferencial, que se imparte en la UAN.

Duración

La investigación duró 8 meses. El desarrollo de las bases teóricas, la elaboración de instrumentos, el diseño de los materiales y la planificación del experimento se realizaron a lo largo de 6 meses. La fase experimental, el análisis de resultados y la redacción del reporte ocuparon el periodo de dos meses.

Fuentes de información

Se utilizó las siguientes fuentes de información: artículos publicados en revistas científicas, libros de texto, memorias de congresos, encuestas y trabajos de los estudiantes, consulta a bancos de información y búsqueda en Internet.

Marco Conceptual

En este capítulo se definen algunos de los conceptos que se utilizaron en el transcurso de la investigación con el objeto de precisar el sentido con que se emplean, se muestra el mapa conceptual, y se establecen las relaciones entre las variables, las preguntas de investigación, los alcances y límites del proyecto**.**

Definiciones básicas

Actividad cognitiva ligada a la sémiosis. Conjunto de estructuras y actividades psicológicas cuya función es la adquisición de conocimiento a través de la distinción entre un objeto matemático y su representación. Consta de tres componentes; el primero es la formación de una representación dentro de un registro dado; la segunda es la transformación de esta representación en el mismo registro donde ha sido formada y la tercera es la transformación de esta representación en una representación de otro registro (Duval, 1998).

Aprendizaje de las matemáticas a través de representaciones. Coordinación, libre de contradicción, de diferentes sistemas semióticos de representación (Hitt, 1998).

Conversión. Transformación de una representación en una representación de otro registro conservando la totalidad o solamente una parte del contenido de la representación inicial (Duval, 1998).

Habilidades de visualización matemática. Dibujar un diagrama apropiado (con lápiz y papel, o en algunos casos, con computadora) para representar un concepto matemático o problema y usar el diagrama para el logro del entendimiento, y como una ayuda en la resolución de problemas (Zimmermann y Cunnigham, 1991).

Percepción. Función por la que la mente de un individuo organiza sus sensaciones y se forma una representación interna de los objetos externos (Hitt, 2003).

Registros de representaciones semióticas. Sistema semiótico que permite dos posibilidades de transformación de una representación en otra; transformaciones internas a un registro, llamadas *tratamientos* y transformaciones que van de un registro a otro denominadas *conversiones.* Si un objeto tiene dos representaciones diferentes en el mismo registro, el paso de una a otra será un *tratamiento*. Si un objeto tiene una representación en un registro y una representación en un segundo registro, el paso de una a otra será una *conversión* (Pluvinage, 1998).

Representación. Señal externa que muestra y hace presente un concepto matemático; también como signo con el que los sujetos piensan las matemáticas e, incluso, como aquellas imágenes mentales con los que la mente trabaja sobre ideas matemáticas. Las representaciones matemáticas son las herramientas que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos y con las cuales los sujetos particulares abordan e interactúan con el conocimiento matemático (Rico, 2000).

Representaciones mentales. Conjunto de imágenes que engloban la concepciones que un individuo puede tener sobre un objeto, una situación y lo que les está asociado (Duval, 1998).

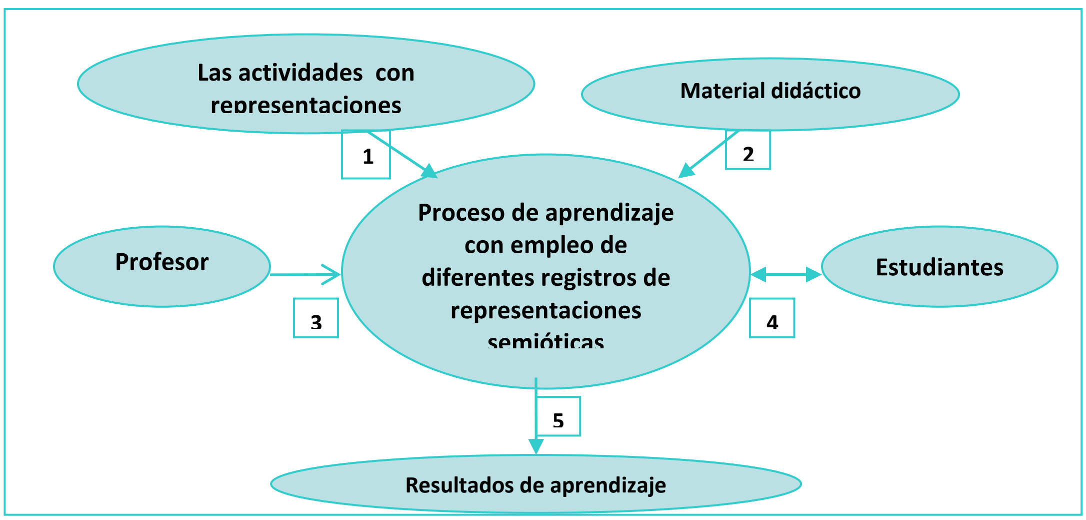
Representaciones semióticas. Producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propios constreñimientos de significancia y de funcionamiento. Una figura geométrica, un enunciado en lengua natural, una fórmula algebraica, una gráfica, son representaciones semióticas que pertenecen a sistemas semióticos diferentes (Duval, 1998).

Semiótica. Ciencia de los modos de producción, de funcionamiento y recepción de los diferentes sistemas de signos y de comunicación en los individuos o colectividades

Tratamiento. Transformación de una representación en el mismo registro donde ha sido formada. El tratamiento es una transformación interna de un registro (Duval, 1998).

Visualización de los objetos y procedimientos matemáticos. Proceso de formación de imágenes (mentalmente, o con lápiz y papel o con la ayuda de tecnología) y el uso de tales imágenes en forma efectiva para el descubrimiento matemático y el entendimiento (Zimmermann y Cunningham, 1991).

Mapa conceptual



Preguntas de investigación

1. ¿Qué dificultades tienen los alumnos al emplear las actividades con diferentes registros de representación semiótica de las funciones exponencial y logarítmica?

2. ¿Cómo el material didáctico propuesto contribuye en el aprendizaje de los alumnos en el tema de las funciones exponencial y logarítmica?

3. ¿Cómo influye el apoyo del profesor en el desarrollo de las actividades y el aprendizaje de los alumnos?

4. ¿Qué correlación existe entre el desempeño en las actividades y el aprendizaje del tema función exponencial y logarítmica?

Pregunta principal

¿Qué efectos produce el empleo de diferentes registros de representación semiótica de las funciones exponencial y logarítmica sobre el aprendizaje de los alumnos?

Alcances y límites

El curso de Cálculo Diferencial para los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Autónoma de Nayarit, consta de funciones, límite, continuidad, diferenciación, aplicaciones de las derivadas, y aplicaciones geométricas. Se eligió el tema de función exponencial y logarítmica por su importancia por su aplicación en la misma matemática (ecuaciones diferenciales, transformada de Laplace, etc.) y en la descripción de procesos físicos-químicos y biológicos.

No se consideraron factores tales como edad, sexo, salud y estado económico de los alumnos que pudieran influir en el aprendizaje.

Para generalizar los resultados de la investigación, se deberá aplicar la propuesta en repetidas ocasiones.

De 20 alumnos invitados a participar solo se presentaron 12, los motivos que dieron fue que estaban en periodo de exámenes.

Marco Teórico

En esta sección se describen las ideas principales que construyen la teoría de aprendizaje del constructivismo que sirvió de base para el proyecto de investigación y la perspectiva teóricas de los registros de representaciones semióticas.

Fundamentación histórica

Napier a principios del siglo XVII; introduce las exponenciales y los logaritmos para facilitar los cálculos que involucraban cifras tediosas y complicadas, cálculos necesarios para el desarrollo del comercio, la astronomía y la navegación. Después se establece la relación entre las progresiones aritmética y geométrica así, se descubren las características de las exponenciales y los logaritmos en el contexto geométrico, esto es, su asociación con una curva, Se les utiliza para describir fenómenos de la naturaleza como la caída de cuerpos o la propagación de las ondas sonoras. Se logra su desarrollo en serie de potencias lo que posteriormente le conferirá el status de función.

Constructivismo

Uno hecho relevante y llamativo de los últimos años, en lo que a las teorías del conocimiento y el aprendizaje se refiere, es la emergencia de un creciente consenso alrededor de la concepción constructivista. Tanto desde la epistemología de las diferentes disciplinas, como desde la psicología educativa, se han abandonado progresivamente las concepciones epistemológicas empiristas y las teorías del aprendizaje asociacionistas. Estudios procedentes de todos estos campos coinciden en afirmar que el conocimiento no es el resultado de una mera copia de la realidad preexistente, sino de un proceso dinámico e interactivo a través del cual la información externa es interpretada y reinterpretada por la mente que construye progresivamente modelos explicativos cada vez más complejos. Es decir, se conoce la realidad a través de los modelos que se construyen para explicarla, siempre susceptibles de ser mejorados o cambiados (Pozo, 1999).

Este amplio acuerdo es importante por el hecho de que autores que representan tendencias de pensamiento e investigación, a veces, muy diferentes, asumen la concepción constructivista. Esto avala su consistencia como principio explicativo de los procesos de adquisición del conocimiento. Sin embargo, este mismo fenómeno de la coincidencia e integración de diferentes enfoques en un marco teórico de referencia común implica lógicamente el hecho de que bajo el término constructivismo se agrupen concepciones, interpretaciones y prácticas bastante diversas (Santrock, 2002).

El constructivismo enfatiza que los individuos construyen activamente el conocimiento y la comprensión. Desde el punto de vista constructivista, la información no se vierte directamente a la mente del estudiante. Al contrario, los alumnos están motivados para explorar su mundo, descubrir el conocimiento, reflexionar y pensar de forma crítica.

Teoría de Jean Piaget

Piaget (citado por Coll, 2003) defiende una concepción constructivista de la adquisición del conocimiento que se caracteriza por lo siguiente:

1) Entre sujeto y objeto de conocimiento existe una relación dinámica y no estática. El sujeto es activo frente a lo real e interpreta la información proveniente del entorno.
2) Para construir conocimientos no basta con ser activo frente al entorno. El proceso de construcción es un proceso de reestructuración y reconstrucción, en el cual todo conocimiento nuevo se genera a partir de otros previos. Lo nuevo se construye siempre a partir de lo adquirido y lo trasciende.

3) El sujeto es el que construye su propio conocimiento. Sin una actividad mental constructiva propia e individual, que obedece a necesidades internas vinculadas al desarrollo evolutivo, el conocimiento no se produce

Piaget (citado por Pozo, 1999) desarrolló una teoría de la cognición basada en los procesos de asimilación y acomodación. La asimilación de un objeto o de una situación implica una interpretación mediante la cual el objeto o la situación se tornan admisibles para ser procesados por cierta estructura cognitiva. El resultado de este proceso es una forma de conocimiento que no es resultado de copiar el dato externo, tal como se presenta a los sentidos y como sostenían las primeras formas del empirismo y las teorías del aprendizaje asociacionistas

La asimilación consiste en incorporar nueva información en un esquema preexistente, adecuado para comprenderla, es decir, cuando un sujeto se enfrenta a una situación nueva, tratará de manejarla en base a los esquemas que ya posee y que parezcan apropiados para esta situación. Como resultado de esto, el esquema no sufre un cambio sustancial en su naturaleza, sino que se amplia para aplicarse a nuevas situaciones. Al contrario de la asimilación, la acomodación produce cambios esenciales en el esquema. Este proceso ocurre cuando un esquema se modifica para poder incorporar información nueva, que sería incomprensible con los esquemas anteriores o más aún, puede suceder que el sujeto desarrolle un nuevo esquema (Pozo, 1999).

En un esquema siempre está presente un mecanismo de reconocimiento, para ver si determinado objeto o situación es admisible para el esquema, es decir, para que el esquema actúe sobre él. Una vez que se pone en marcha un esquema, si los resultados son compatibles con los esperados, entonces dicho esquema se hace más estable como recurso cognitivo. Puede suceder que ante una situación nueva un esquema no responda adecuadamente. Entonces el esquema cognitivo se desequilibra, con los cual el sujeto toma conciencia del problema que enfrenta y modifica el esquema en cuestión, hasta que consigue el resultado esperado. Por lo tanto el aprendizaje consiste en la consolidación de los esquemas cognitivos y en la generación de otros nuevos, a partir de los desequilibrios de los existentes (Pozo, 1999).

Teoría del aprendizaje de Vygotsky

Vygotsky (citado por Ursini, 1996) propuso una manera completamente novedosa de concebir el desarrollo cognoscitivo del ser humano y de explicar la formación de los procesos psicológicos superiores como son, por ejemplo, el pensamiento, la memoria lógica y los conceptos. Sus ideas dejan entrever la posibilidad de un acercamiento a la investigación en didáctica de las matemáticas que según algunos investigadores es diferente y según otros es complementario al que se deriva de la teoría de Piaget. De la teoría de Vygotsky se desprende un posible reordenamiento curricular en el cual los conceptos más complejos anteceden a los más simples, modificando la idea de que lo más complejo se construye a partir de lo más simple

Al igual que Piaget, el ruso Lev Vygotsky (1986-1934) también creía que los estudiantes construyen activamente su conocimiento. Tres ideas se encuentran en el corazón de la teoría de Vygotsky (citado por Santrock, 2002):

1) Las destrezas cognitivas pueden entenderse sólo cuando se analizan e interpreten a la luz del desarrollo del individuo.
2) Las destrezas cognitivas son medidas por palabras, lenguajes y formas del discurso que sirven como herramientas psicológicas para facilitar y transformar la actividad mental.

3) Las destrezas cognitivas tienen sus orígenes en las relaciones sociales y están inmersas en un ambiente sociocultural

Vygotsky (citado por Pozo, 1999) modifica la idea clásica estímulo-respuesta de la teoría conductista, al considerar que el hombre no se limita a responder a los estímulos sino que actúa sobre ellos. Esto es posible gracias a la *mediación de instrumentos* que se interponen entre el estímulo y la respuesta. Los mediadores son instrumentos que transforman la realidad en lugar de imitarla, su función no es adaptarse pasivamente a las condiciones ambientales sino modificarlas activamente. Vygotsky (citado por Pozo, 1999) distingue dos clases de instrumentos, a saber: 1) herramientas que actúan materialmente sobre el estímulo, la cultura proporciona al individuo las herramientas necesarias para modificar su entorno, adaptándose activamente a él. 2) sistemas de signos o símbolos que median las acciones de los individuos, pero a diferencia de la herramienta, el signo no modifica materialmente el estímulo sino que modifica a la persona que lo utiliza y por lo tanto actúa sobre la interacción de esa persona con su entorno El desarrollo de la conciencia y de los procesos mentales depende de la interacción social, y ésta involucra necesariamente los sistemas de signos como mecanismos de mediación. Los signos tales como el habla, la escritura, los sistemas numéricos son un producto histórico-social. Por lo tanto, cuando un sujeto se apropia de los signos, por un lado se apropia de una cultura y, por otro, los signos moldean el desarrollo cognoscitivo del individuo (Ursini, 1996).

Según Vygotsky (citado por Pozo, 1999) los sistemas de signos los proporciona la cultura, pero advierte que su adquisición no consiste sólo en tomarlos del mundo externo, sino que deben ser asimilados o interiorizados, lo cual exige una serie de procesos psicológicos. Para Vygotsky (citado por Pozo, 1999) el aprendizaje fluye desde el exterior del sujeto al interior de éste a través de un proceso de transformación de las acciones externas, sociales, en acciones internas, psicológicas, es decir, comienza de forma interpersonal, para convertirse en intrapersonal. A esto Vygotsky denominó ley de la doble formación, ya que según él, todo conocimiento se adquiere dos veces.

Vygotsky coincide con Piaget al considerar que los signos se adquieren en interacción con el ambiente, pero en el caso de Piaget, ese ambiente está compuesto únicamente de objetos, algunos de los cuales son sociales, mientras que para Vygotsky, está compuesto de objetos y de personas que median en la interacción del individuo con los objetos. Vygotsky difiere de Piaget en cuanto a la formación de significados por el individuo; mientras que la teoría piagetiana propone que el sujeto construye sus significados de forma autónoma. La teoría Vygotskiana propone que el individuo reconstruye los significados (Pozo, 1999).

Para Vygotsky (citado por Pozo, 1999) el nivel de desarrollo efectivo está determinado por lo que el sujeto logra hacer de modo autónomo, sin ayuda de otras personas o de mediadores externamente proporcionados. El nivel de desarrollo efectivo representa los mediadores ya asimilados por el sujeto. Por otro lado, el nivel de desarrollo potencial esta determinado por lo que el sujeto es capaz de hacer con ayuda de otras personas o de instrumentos mediadores externamente proporcionados. La diferencia entre desarrollo efectivo y el desarrollo potencial se denomina zona de desarrollo próximo (ZDP) Tchoshanov (2002). propone la zona de desarrollo avanzado (ZDA), en la cuál se logra un aprendizaje a profundidad sobre un tema a través de generalizaciones alcanzadas por un dialogo intrapersonal.

Perspectivas teóricas

El marco teórico en el que se desarrolló esta investigación es la teoría de registros de representación semiótica de R. Duval (1998). Este marco permite explicar el nivel de conceptualización en base a los cambio entre representaciones.

La tesis que sostiene que las diferentes representaciones de los conceptos matemáticos son fundamentales para su comprensión, han llevado a incrementar su estudio durante los últimos años. Muchos investigadores han dedicado sus esfuerzos a precisar el concepto de representación y analizar el papel que desempeñan en el razonamiento de los alumnos (Duval, 1998, 2002; Hitt, 1998, 2002; Kaput, 1998).

En una situación de aprendizaje, las representaciones forman parte de los elementos que se estructuran en la interacción entre el sujeto y el objeto-concepto que se forma. Pluvinage (1998) afirma que existen tres tipos de objetos en relación con sus diferencias ontológicas: objetos físicos, culturales y matemáticos. El triángulo *significante-significado-referente* sólo es relevante para los objetos físicos, los demás objetos necesitan otros esquemas semánticos. Los objetos matemáticos son aquellos donde ningún objeto real se puede considerar como un representante perfecto. Se necesitan por lo menos dos representaciones diferentes (lenguaje natural, algebraico-simbólico, gráfico-geométrico, numérico, etc.) para tener una idea de dicho objeto (Sandoval y Díaz Barriga, 2002; Duval, 1998).

Una particularidad que tienen las matemáticas es que para hablar de un objeto, sólo se puede hacer a través de alguna de sus representaciones, pues no se puede tener acceso directo a ellos mediante la percepción. En este sentido, se requiere de una representación que permita realizar una serie de actividades cognitivas, a través de las cuales, el estudiante se aproxima a dicho objeto. Pero para generar una comprensión matemática, se hace necesario que el individuo pueda diferenciar que la representación no agota al objeto matemático (Duval, 1998).

Un mismo objeto puede tener diferentes representaciones. Cada representación, según Duval (1998, p. 185) "es parcial cognitivamente con respecto a lo que ella representa", esto es, cada sistema de representación puede resaltar características diferentes de un objeto matemático. En la manera como un objeto se representa en matemáticas permite manipular y procesar cada una de esas representaciones, de forma tal que los distintos modos de representación expresan, a su vez, las propiedades y relaciones estructurales entre los conceptos, esto es, cada sistema de representación permite ver una faceta diferente del objeto matemático a estudiar y pone de manifiesto algunas de sus propiedades. Duval (1998) establece que dado que cada representación es parcial con respecto a lo que representa, se debe considerar como absolutamente necesario, la interacción entre diferentes registros de representación del objeto matemático para la formación del concepto.

*"*La comprensión (integradora) de un contenido conceptual, reposa en la coordinación de al menos dos registros de representación, y esta coordinación se manifiesta por la rapidez y la espontaneidad de la actividad cognitiva de conversión*"* (Duval, 1998, p. 186).

Como lo plantean Lupiáñez y Moreno (2001, pp. 294) "la construcción de un concepto matemático es un proceso en permanente desarrollo, por lo que el nivel de objetividad con el que lo entendemos es sólo transitorio. Nunca se posee plenamente el concepto". En otras palabras, cada individuo enriquece sus conceptos en la medida que se le presentan nuevas facetas de estos.

Según Hitt (1998) la construcción de conceptos se realiza mediante tareas que implican la utilización de diferentes sistemas de representación y que promueven la articulación coherente entre representaciones, libre de contradicciones. Como lo señalan Lupiáñez y Moreno (2001, p. 291) “los sistemas de representación y las representaciones semióticas constituyen la clave para entender la construcción del conocimiento matemático de los estudiantes”. Las representaciones no solamente son necesarias para fines de comunicación, sino que son igualmente esenciales para la actividad cognitiva del pensamiento (Duval, 1998).

“Estamos entonces en presencia de lo que se podría llamar la paradoja cognitiva del pensamiento matemático: por un lado, la aprehensión de los objetos matemáticos no puede ser otra cosa que una aprehensión conceptual y, por otro lado, solamente por medio de las representaciones semióticas es posible una actividad sobre los objetos matemáticos” (Duval, 1998, p. 175).

La coordinación entre diferentes registros de representación semiótica está relacionada con la comprensión y con las dificultades del aprendizaje conceptual. Muchos de los obstáculos encontrados por los alumnos en diferentes tópicos matemáticos pueden ser descritos y explicados por una falta de coordinación de registros de representación. Confundir los objetos matemáticos con su representación provoca una falta de comprensión, y los conocimientos así adquiridos, permanecen como representaciones que no sugieren tratamiento alguno y por lo tanto son poco útiles fuera del contexto donde se adquirieron (Duval, 1998).

Marco Metodológico

En este capítulo se describen las metas, variables y procedimientos que se emplearon para determinar el aprendizaje de la función exponencial y logarítmica con empleo de diferentes registros de representación semiótica .Se describen también las técnicas de muestreo y de análisis de datos que serán empleadas y los materiales que se elaboraran para el desarrollo del trabajo.

Procedimientos

La investigación se realizó en tres etapas:

1. Planeación del experimento y actividades a manejar en el aula. Diseño de los materiales de apoyo y elaboración de instrumentos y criterios de evaluación.

2. Desarrollo de la experimentación y obtención de los datos experimentales.

3. Elaboración de los datos experimentales, análisis e interpretación de los resultados, formulación de conclusiones, redacción del reporte y defensa de tesis.

Muestreo

La investigación se realizó con el grupo único integrado por 20 alumnos de III semestre de la Licenciatura en Matemáticas en el curso Cálculo Diferencial, que se imparte en la UAN.

De 20 alumnos 12 asistieron el experimento. Los principales motivos manifestados por los estudiantes, con respecto a la inasistencia fueron: que estaban en fin de cursos, exámenes finales, trabajos finales que entregar.

Estadísticos

La existencia de una relación lineal entre el nivel logrado por los alumnos en el desarrollo de las actividades con diferentes registros de representación semiótica (variable independiente *x*) y sus resultados de aprendizaje (variable dependiente *y*) en el tema de las funciones exponencial y logarítmica se examino en términos del coeficiente de correlación. De esta manera, la hipótesis nula se plantea bajo el criterio de que el coeficiente de correlación de la población r, es igual a cero y la hipótesis alternativa, el coeficiente de correlación de las variables es diferente de cero (Berenson y Levine, 1996).

Para determinar la existencia de una correlación significativa se utilizo la prueba *t* Student, la cual sigue una distribución t con grados de libertad, donde *r* es el coeficiente de correlación de la muestra y *n* el número de observaciones (datos). Se considero un nivel de significativo del 5%

Técnicas para la recopilación y análisis de los datos

La recopilación de los datos del experimento se realizo mediante la observación directa del desempeño de los estudiantes en las actividades en el aula. Se asignaron valores de acuerdo a los diferentes niveles de ejecución. En relación a la variable dependiente, la recolección de los datos se realizo mediante la evaluación de los trabajos realizados por los alumnos en el examen final.

Los datos obtenidos se tabularon en las hojas (Apéndice G) para analizar los aciertos obtenidos por cada alumno en cada actividad, y las observaciones acerca del tipo de errores cometidos.

Las opiniones de los alumnos sobre la contribución de materiales didácticos empleados, actividades propuestas y apoyo del profesor en el desarrollo de habilidades de solución de problemas se obtuvieron de las respuestas de los alumnos al cuestionario de opinión**.**

Diseño de materiales

Los materiales didácticos se diseñaron de acuerdo al constructivismo y la teoría de Duval sobre los registros de representación semiótica:

- Cronograma de actividades (Apéndice A).
- Manual para el uso del programa Winplot (Apéndice B).
- Cuaderno de trabajo (Apéndice C).
- Lecturas (Apéndice D).
- Examen final (Apéndice E).
- Cuestionario de opinión sobre materiales didácticos empleados, actividades propuestas y apoyo del profesor (Apéndice F).
- Hojas para registro de los datos (Apéndice G).

Marco Operativo

En este apartado se describen el empleo de los instrumentos de evaluación, obtención y procesamiento de datos y los recursos utilizados en la investigación.

Instrumentos de evaluación

Los instrumentos de evaluación que se emplearon en el estudio son:

• Actividades del cuaderno de trabajo (Apéndice C), para describir las dificultades y los efectos que produce el empleo de diferentes registros de representación semiótica.

• Examen final (Apéndice E), para evaluar el aprendizaje logrado por los alumnos.

• Cuestionario para obtener las opiniones de los alumnos sobre las actividades didácticas, materiales y el apoyo del profesor (Apéndice F).

Experimentación

El experimento se realizó en el semestre enero-julio de 2007 en el curso de Cálculo Diferencial del Área de Ciencias Básicas e Ingenierías de la UAN. Para realizar el experimento se programaron ocho sesiones, con una duración aproximada de dos horas cada una.

Se formaron al azar parejas para trabajo en el laboratorio de cómputo se les asignó una computadora. A cada estudiante se le proporcionó una copia del manual de Winplot (Apéndice B), lecturas (Apéndice D) y un formulario (Apéndice C). El investigador encargado del grupo, dio las instrucciones para el uso apropiado de los materiales didácticos, y el programa winplot.

Las ocho sesiones se realizaron de la misma forma: se dio a conocer el objetivo de la actividad, al término de esta, una pareja escogida al azar por el investigador, presenta sus resultados al grupo, después de la presentación se realizo una discusión grupal. El investigador llenó la hoja de registro correspondiente al aprendizaje por estudiante. Al finalizar la sesión el investigador grabó en la USB los trabajos de cada pareja y les hace entrega de la actividad extraclase.

Sesión 1. Los alumnos iniciaron con Winplot en la graficación de funciones y preguntaron al investigador sobre sus dudas.

Sesión 2. Los estudiantes en parejas discutieron los ejemplos sobre las aplicaciones de las funciones exponencial y logarítmica a la ciencia. La mayoría de los alumnos no presentaron problemas aplicados a la función logaritmo, algunos argumentaron que no hallaron aplicaciones y otros que no las entendieron. Las preguntas de los alumnos estuvieron enfocadas en la construcción de la función logaritmo.

Sesión 3 y 4. Los estudiantes trabajaron en las actividades de las representaciones analítica, gráfica y verbal, así como la traducción entre ellas. En ambas sesiones en los apartados donde se requerían resolver problemas en forma analítica (sin graficar) los alumnos buscaban la forma de utilizar la computadora para graficar y responder. Se tuvo que retirar a los alumnos de las computadoras.

Sesión 5. Ningún de los alumno realizo la actividad extraclase, argumentaron que tenían mucha tarea, además de estudiar para dos exámenes. Se les dio una hora para que realizaran la actividad extraclase, se continuó con el experimento. La sesión se extendió a cuatro horas.

Sesión 6. Se inició la sesión con cuatro alumnos, el resto se integró transcurridos treinta minutos, los alumnos argumentaron que estaban haciendo examen. El propósito de esta sesión era que los alumnos utilizaran los conocimientos de las sesiones anteriores para resolver ejercicios de análisis de la función logaritmo, aunque los alumnos no tenían ningún conocimiento de logaritmos la representación más utilizada por ellos fue la analítica. La sesión se prolongó a una hora más de la programada

Sesión 7 y 8. Los alumnos llegaron puntal a la sesiones. Los objetivo de la sesiones fueron las soluciones analítica, grafica de ecuaciones exponenciales y logarítmicas respectivamente. La sesión siete se extendió una hora más de la programada debido a las dudas algebraicas de los estudiantes a diferencia de la sesión ocho que se cortó una hora el manejo adecuado de la computadora y el programa winplot..

Sesión 9. Se aplicó la posprueba (Apéndice E). Al finalizar la sesión se les pidió a los alumnos que contestaran una encuesta de opinión sobre el uso de la computadora, y los materiales didácticos (Apéndice F).

Obtención y procesamiento de datos

Los datos experimentales (Apéndice G) se obtuvieron durante dos semanas de la evaluación los trabajos del cuaderno y las respuestas de los alumnos a la posprueba y la encuesta de opinión.

Para obtener los valores de la variable x se sumaron los puntos que obtuvo el i-ésimo alumno en las actividades de la 1 a la 8. Para obtener los valores de la variable y se sumaron los puntos que obtuvo el i-ésimo alumno en el examen final que contaba con 25 ítems con un valor de 4 puntos cada uno.

Se utilizó el "software" STATGRAPHICS plus for Windows 4.0 para:

- Obtener las gráficas de residuales y de dispersión
- Determinar el modelo lineal
- Hacer el análisis de regresión

Para los gráficos de barras de las encuesta de opinión se utilizó el “software” Microsoft Excel 2006.

Recursos

- Computadora para procesar y analizar los datos experimentales.
- Programa Statgraphics Plus 4.0
- Laboratorio con 6 computadoras
- Programa Winplot

El análisis de respuesta dada por los alumnos a la post-prueba permitió los efectos que produjo el empleo la propuesta didáctica para la enseñanza de la función exponencial y logarítmica con empleo de diferentes registros de representación semiótica. Para llevara a cabo este análisis las preguntas de la posprueba se agruparon por ítems. En la tabla 4 se muestran los resultados expresados en porcentaje.

Resultados Experimentales

A continuación se describen y analizan los resultados experimentales obtenidos al emplear la propuesta didáctica para la enseñanza de las funciones exponenciales y logarítmicas con empleo de diferentes registros de representación semiótica.

Análisis del desarrollo de aprendizaje

Los datos sobre el desarrollo del aprendizaje de los alumnos se obtuvieron de la evaluación de las actividades realizadas en el aula y en las extraclases de acuerdo con los criterios establecidos en el cuaderno de trabajo (Apéndice C).

Se sumaron los puntos que obtuvo cada alumno en los ejercicios de cada actividad (Apéndice G, Tablas 12-17) y se expresaron la suma para cada actividad en forma porcentual (Tabla 1).

Tabla 1. *Resultados de evaluación de las actividades con diferentes registros de representación semiótica.*

Actividad	Alumnos											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	83	72	78	100	83	100	61	94	56	78	33	72
4	62	88	62	50	62	100	38	50	75	50	75	50
5	50	83	75	33	50	16	25	33	67	58	58	50
6	62	75	75	62	75	50	50	62	50	50	62	62
7	75	75	63	63	63	75	60	62	62	75	55	62
8	87	87	100	75	55	75	62	62	87	75	75	75

Los porcentajes que se reportan en la tabla 1 muestran los resultados del proceso de aprendizaje de los alumnos de actividad a actividad. Los alumnos 2 y 3 fueron los únicos que obtuvieron buenas calificaciones en todas las actividades, acercándose el alumno 1 con solo una calificación baja, en contraste con los alumnos 7, 10 y 11 con tres actividades de baja calificación. Los demás alumnos obtuvieron buenas calificaciones en cuatro de las seis actividades.

Se observa que en la actividad 3 correspondientes a las representaciones analítica, verbal y gráfica del dominio, rango, carácter de crecimiento e intersección con los ejes coordenados de la función exponencial la mayoría de los alumnos mostró un buen aprendizaje. Sin embargo en las actividades 4 y 5 correspondientes a la traducción entre las representaciones analíticas, gráficas y verbales de la función exponencial y función logarítmica y sus propiedades enfoque analítico, gráfico y verbal, el rendimiento de los alumnos bajó considerablemente. Esto, tal vez, se deba a dos causas: los alumnos estaban en proceso de adaptación de una nueva forma de enseñanza y que ningún alumno hizo la actividad extraclase para la sesión 5. Eso se ve reflejado puesto que en la actividad 5 es la de más bajo redimiendo.

De la actividad 6 en adelante se notó un progreso en el rendimiento de los alumnos. La traducción entre la representación analítica, gráfica y verbal de la función logarítmica (actividad 6) cuatro alumnos tiene un rendimiento muy pobre.

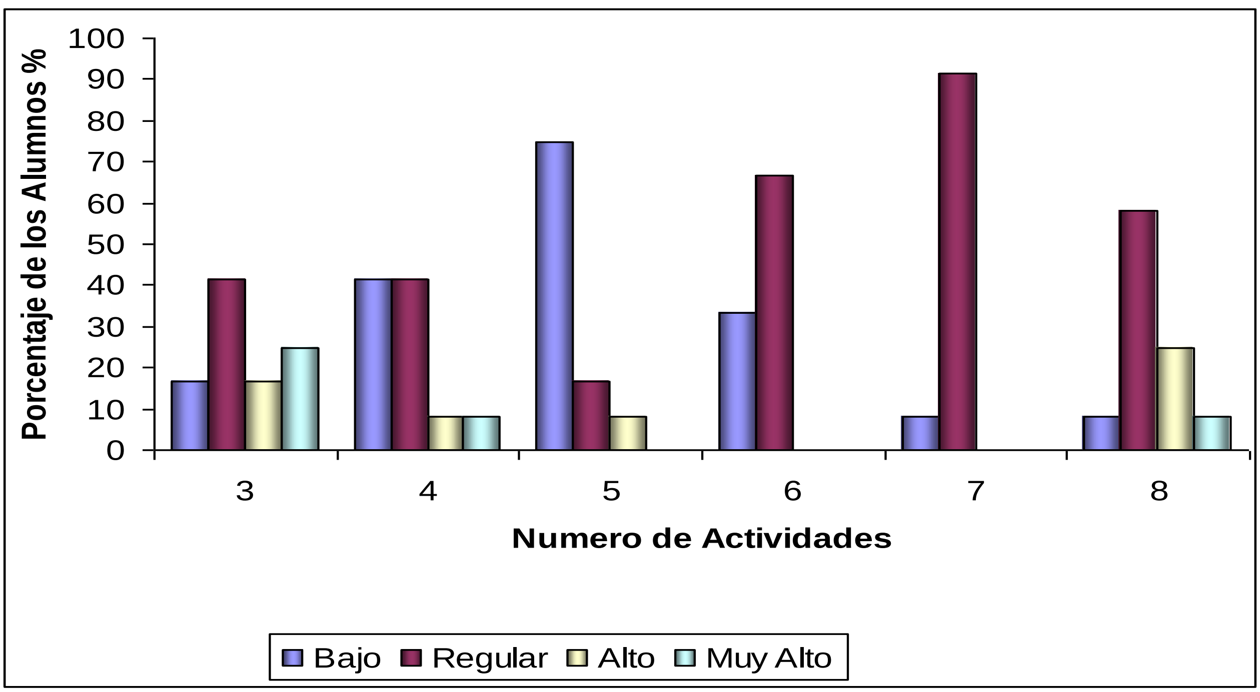
En las actividades 7 y 8, soluciones analíticas y graficas de ecuaciones exponenciales y logarítmicas fueron las más aprobadas por los alumnos.

Se determinaron el porcentaje de los alumnos en cada uno de los niveles de aprendizaje logrados en cada actividad (Tabla 2).

Tabla 2. *Distribución de los alumnos (%) por los niveles de aprendizaje*.

Actividad	**Niveles**			
	bajo	**Regular**	**alto**	**Muy Alto**
Actividad 3	16.67 %	41.66 %	16.67%	25 %
Actividad 4	41.66 %	41.66%	8.33%	8.33 %
Actividad 5	75.00%	16.67 %	8.3 3%	0%
Actividad 6	33.33%	66.6 %	0 %	0 %
Actividad 7	8.33 %	91.66 %	0 %	0 %
Actividad 8	8.33%	58.33%	25.00 %	8.33 %

Los resultados de la Tabla 2 se presentan en el histograma (Fig. 1) para visualizar y comparar los niveles de aprendizaje logrados por los alumnos durante el experimento en las actividades de la 3 a la 8 del Cuaderno de Trabajo.



Niveles de aprendizaje: Bajo < 60 – Regular 60 a 79 – Alto 80 a 89 - Muy alto 90 a 100

Figura 1. Histograma de los niveles de aprendizaje logrados por los alumnos.

En el histograma se pude observar que en la actividad 3 el nivel de aprendizaje es regular. En las actividades 4 y 5 baja el nivel de aprendizaje y vuelve a subir a partir de la actividad seis.

Análisis del resultado final del aprendizaje

El análisis de las repuestas dadas por los alumnos a la posprueba permitió describir el resultado final de aprendizaje. Para llevar a cabo el análisis las preguntas se agruparon por ítems de la siguiente forma: definición, operación, representación analítico – grafica; ejercicio de análisis de las funciones exponenciales y logarítmicas y representación gráfica – analítica, analítica grafica de ecuaciones exponenciales y logarítmicas. La tabla 3 muestra la agrupación de ítems.

Tabla 3. *Agrupación ítems de análisis de la post-prueba*

	Ítems de la post-prueba
1. Definición y propiedades de la función exponencial.	1, 2, 3, 4, 5, 6
2. Operación con función exponencial.	7, 13
3. Definición y propiedades de la función logarítmica.	8, 9, 10, 11, 12
4. Función exponencial representación analítica- grafica.	14
5. Ejercicio de traducción entre las representaciones función exponencial.	15
6. Función logarítmica representación gráfica-analítica.	16
7. Ejercicio de análisis de la gráfica. Función logarítmica.	17, 18, 22
8. Función logarítmica representación analítica-grafica.	19, 20, 21
9. Ecuación exponencial representación gráfica-analítica.	23
10. Ecuación logarítmica representación analítica.	24
11. Ecuación logarítmica representación analítica -grafica.	25

La tabla 4 muestra los resultados totales por las categorías; respuestas correctas y no contesto o respuestas incorrectas, que se obtuvieron al sumar los puntos de la pos prueba (apéndice G, tabla 20). Se expresaron en porcentajes.

Tabla 4. Resultados de evaluación de la posprueba

	Numero de repuestas (porcentajes)	
Preguntas	**No contesto o Respuestas Incorrectas**	**Respuestas Correctas**
Definición y propiedades de la función exponencial.	(2) 50	50
Operación con función exponencial	25	75
Definición y propiedades de la función logarítmica	(4)67	33
Función exponencial representación analítica- grafica	9	91
Ejercicio de traducción entre las representaciones función exponencial.	34	66
Función logarítmica representación gráfica-analítica	9	91
Ejercicio de análisis de la gráfica. Función logarítmica.	42	58
Función logarítmica representación analítica-grafica.	(5)42	58
Ecuación exponencial representación gráfica-analítica	50	50
Ecuación logarítmica representación analítica	9	91
Ecuación logarítmica representación analítica -grafica	50	50

Nota: el número entre paréntesis indica el número de alumnos que tuvo solo una repuesta incorrecta de la agrupación 6 ítems

Se observa que en el conjunto de ítems definición y propiedades, la mitad de los alumnos dieron respuestas correctas. El rango y el valor de $x = 1$ de la función exponencial fueron los errores comunes en esta parte del examen. En el tercer grupo de ítems definición y propiedades de la función logarítmica el 67% de los estudiantes dieron respuestas incorrectas o no contestaron, los errores que se observaron fueron el dominio de la función. Hubo confusión en los dominios y rangos de las funciones exponencial y logarítmica.

En las representaciones analíticas – graficas de la funciones exponencial y logarítmica el 91% de los alumnos dieron respuestas favorables. En los ejercicios de análisis de la función exponencial y logarítmica (15, 17, 18, 22), el 66% y el 58% respectivamente de alumnos contestaron correctamente. Los errores más comunes fue la conversión de función logarítmica a función exponencial.

En los ítems donde se evalúan la ecuación exponencial representación gráfica-analítica y ecuación logarítmica representación analítica –grafica, la mitad de los estudiantes dieron respuestas correctas, la otra mitad procedió a resolver como una funciones exponencial o logarítmica según fuera el caso, es decir las respuestas que deberían ser ecuaciones las daban como funciones.

Análisis de las respuestas al cuestionario de opinión

En el apendice F se adjunta la encuesta de opninion y en el apendice G, tabla 19 se muestran las repuestas de cada alumno que participó el estudio. Con estos instrumentos se recabó información sobre la forma en como los estudiantes percibieron la propuesta didactica para la enzeñanza de las funciones exponencial y logaritmica con empleo de diferentes registros de represenatcion semiotica.

La encuensta consta de 12 preguntas que correponden a las siguientes categorias de analisis: uso de winplot ítem del 1 al 3; lecturas ítem del 4 al 6; actividades ítem del 7 al 10 y apoyo del investigador e infraestructura 11 y 12 ítem.

En la tabla 5 se muestra los porcentajes de respuesta a la encuesta de opcion .

Tabla 5. *Resultados del análisis de las respuestas al cuestionario de opinión por las opciones.*

Categorías de evaluación / Preguntas	Mucho %	Bastante %	Regular %	Poco %	Nada %
1. ¿Consideras el uso del programa Winplot favoreció tu aprendizaje?	33	42	8	17	0
2. ¿Consideras que el haber utilizado el programa Winplot se mejoró tu participación en clase?	17	50	25	0	1
3. ¿Te agradó trabajar con el programa Winplot?	33	42	25	0	0
4. ¿Consideras que las lecturas favorecieron tu aprendizaje?	33	42	17	8	0
5. ¿Consideras que las lecturas mejoró tu participación en clase?	17	25	41	17	0
6. ¿Te agradó las lecturas?	17	17	41	17	8
7. ¿Consideras que el haber realizado las actividades de las funciones exponencial y logarítmica con empleo de diferentes registros de representación semiótica favoreció tu aprendizaje?	25	67	8	0	0
8¿Consideras que las actividades de las funciones exponencial y logarítmica con empleo de diferentes registros de representación semiótica mejoró tu participación en clase	59	33	0	8	0
9. ¿Te agradó realizar las actividades de las funciones exponencial y logarítmica con empleo de diferentes registros de representación semiótica?	42	42	8	8	0
10. ¿El tiempo destinado para cada actividad fue adecuado?	8	50	25	0	17
11. ¿El apoyo del investigador durante las actividades fue útil?	25	25	42	8	0
12. ¿La infraestructura del laboratorio de cómputo, como apoyo para el desarrollo del curso fue adecuado	25	34	33	8	0

Como se muestra en la tabla 5, la mayoría de las respuestas de opinión sobre el uso de winplot como apoyo para graficar y analizar los problemas correspondientes se agrupan en las categorías mucho y bastante. Esto refleja que el uso de la computadora fue favorable para el aprendizaje y realizar las actividades.

Las respuestas de los alumnos a la pregunta si las lecturas favorecieron su aprendizaje el 33 % consideró mucho y el 42% bastante. Sin embargo las preguntas si le agradaron las lecturas y si mejoro su participación en clase se agrupan en bastante y regula.

Las opiniones sobre las actividades de las funciones exponencial y logarítmica con empleo de diferentes registros de representación semiótica la mayoría de las respuestas se agrupa en las categorías mucho y bastante. Esto refleja que la opinión de la mayoría de los estudiantes fue favorable ya que mejoró el interés por el tema y favoreció el aprendizaje. En relación al tiempo destinado por actividad, apoyo del investigador e infraestructura las categorías se agruparon en mucho bastante y regular.

Resultados estadísticos

En la tabla 6 se muestran los valores obtenidos de las variables. Donde x_i es la sumatoria total de puntos por alumno de las actividades de las funciones exponencial y logarítmica con empleo de diferentes registros de representación semiótica e y_i es la sumatoria total de puntos de lograda por alumno en el examen final.

Tabla 6. *Valores de las variable*

x_i	7.6	8.0	8.2	7.3	7.0	7.8	6.0	7.2	7.1	7.2	6.1	7.5
y_i	84	92	92	84	68	88	64	72	72	76	60	76

La figura 2 muestra el diagrama de dispersión obtenido con las calificaciones de los 12 estudiantes y el modelo lineal ajustado a los datos. En las Tablas 7 y 8 se presentan el reporte del análisis de regresión y el análisis de varianza. De acuerdo al reporte, el modelo lineal que describe la relación entre el aprendizaje de los alumnos (y) y las actividades con diferentes registros de representación semiótica de las funciones exponenciales y logarítmicas (x), es $y = 3.37037 + 1.1307x$, lo que indica que por cada punto extra que obtenga un estudiante en la calificación de las actividades con diferentes registros de representación semiótica se espera que incremente 1.1307 puntos en la calificación de Conocimiento sobre el aprendizaje de los alumnos.

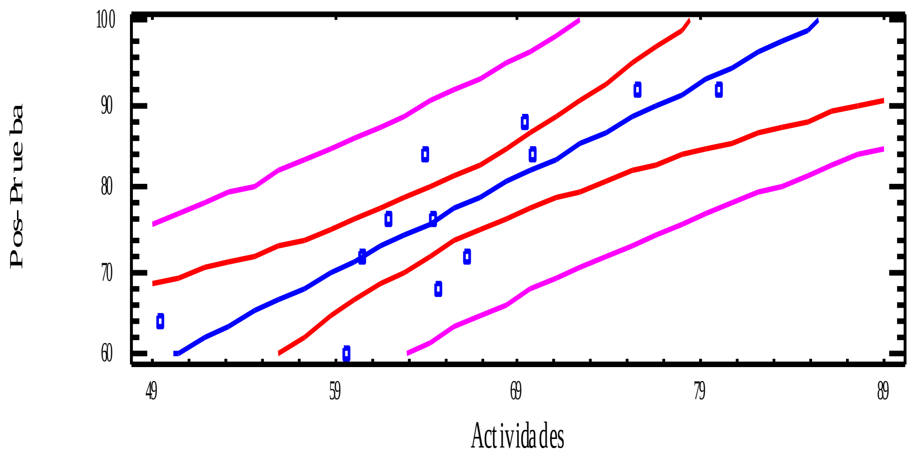


Figura2. Diagrama de dispersión y del modelo ajustado

Tabla 7. Análisis de regresión para el modelo lineal $y = \beta_0 + \beta_1 x$

Variable Dependiente: El aprendizaje de los alumnos
Variable Independiente: Actividades con diferentes registros de representación semiótica de las funciones exponenciales y logarítmicas

Parámetro	Estimado	Error St.	Estadístico t	Valor de P
Ordenada al origen	3.37037	15.6449	0.215429	0.8338
Pendiente	1.1307	0.237594	4.75894	0.0008

Tabla 8. Análisis de Varianza

Fuente	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Cuad. medios	Relación F	Valor de P
Modelo	873.134	1	873.134	22.65	0.0008
Residuales	385.532	10	38.5532		
Total (Corr.)	1258.67	11			

Coeficiente de Correlación = 0.832885 R-cuadrada = 69.3698

Al comparar el estadístico t obtenido para la pendiente (4.75894), con el correspondiente valor crítico para α =0.05 y 10 grados de libertad (2.2281) se rechaza la hipótesis H_0 definida anteriormente. Asimismo, la relación F obtenida en el análisis de varianza (22.65), es mucho mayor que el valor crítico de F al 5% de significancia con 1 y 10 grados de libertad en el numerador y denominador respectivamente (4.96). Como consecuencia, el valor de P en el análisis de varianza es muy pequeño, lo que indica que la probabilidad de que $\beta = 0$ es casi nula. Con estos resultados se descarta la hipótesis nula y se establece que existe una relación lineal entre las dos variables, estadísticamente significativa, con un nivel de significancia de 0.05.

El coeficiente de correlación de 0.832885 indica una relación lineal moderadamente fuerte entre las variables. El valor de r^2 , el cual mide la proporción de la variación total en y que es explicada por la introducción de la variable x en el modelo, indica que el 69.3698 % de la variabilidad total en el conocimiento sobre de la función exponencial y logarítmica se atribuye a las actividades realizadas por los alumnos, por lo que deben existir otros factores que no fueron considerados.

Para verificar los supuestos de los errores bajo los cuales se desarrolló el modelo, se realizaron las gráficas de residuales.

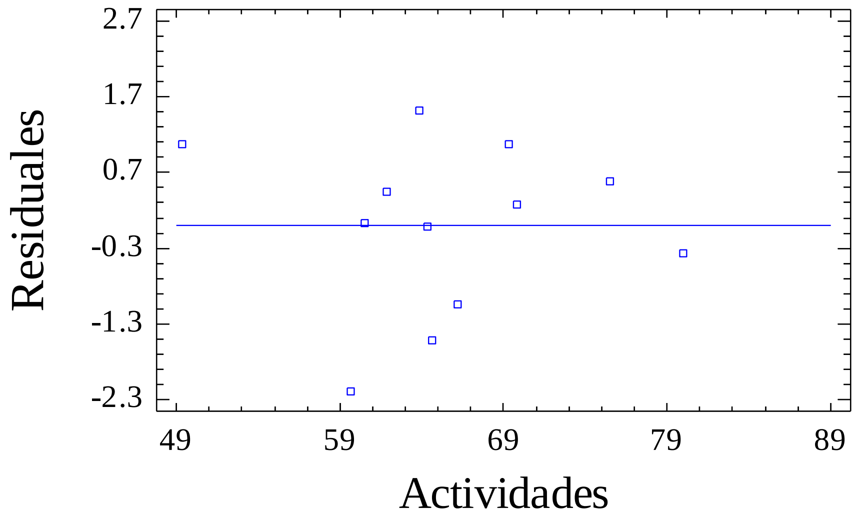


Figura 3. Residuales contra x_i

La gráfica de residuales (Fig. 3) contra x_i, muestra que no hay diferencias importantes en la variabilidad de los residuos para diferentes valores de x, por lo que se puede considerar homocedasticidad (igualdad de varianzas para cada valor de x).

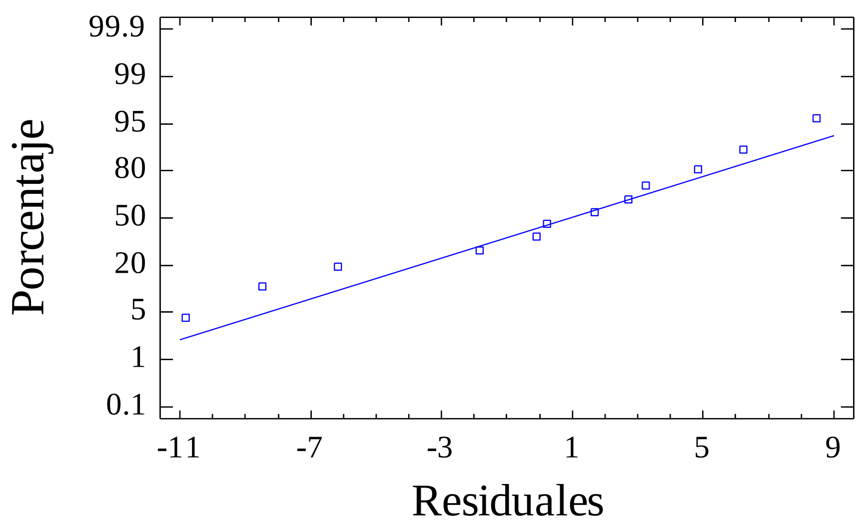


Fig. No. 4   Grafica de probabilidad normal

Es difícil evaluar la suposición de normalidad para una muestra de 12 observaciones. Sin embargo en la gráfica de probabilidad normal (fig. 4) se observa que los puntos se aproximan lo suficiente a la línea recta, por lo que parece razonable concluir que no existe una evidencia contundente de violación a la suposición de normalidad. Además el coeficiente de curtósis studentizado (0.600251) y el coeficiente de asimetría studentizado (-1.36433) se encuentran entre -2 y 2, lo cual confirma que existe evidencia de que el supuesto de normalidad se cumple.

Conclusiones

Los resultados obtenidos con el coeficiente de correlación y la prueba t reflejaron que las actividades de la propuesta didáctica para la enseñanza de las funciones exponencial y logarítmica con empleo de diferentes registros de representación semiótica fueron un factor muy importante en al aprendizaje de los estudiantes de la licenciatura en matemáticas de la UAN. Se rechazó la hipótesis nula y se aceptó la hipótesis alternativa.

Con la propuesta se pone de manifestó cómo el uso de distintas representaciones favorece el aprendizaje, esto puede deberse a diferentes razones, dos de ellas son: que permite a los alumnos se formen una imagen conceptual, pudiendo escoger la representación más adecuada para cada problema y que compensa las limitaciones de unas representaciones con otras.

De la encuesta de opinión se puede concluir que las lecturas, los materiales y las actividades motivó a los estudiantes y mejoró su interés por aprender. EL uso del software Winplot fue de gran ayuda en el aprendizaje de los alumnos pues beneficio la parte visual de las funciones. También pudo observarse que el docente influye de manera positiva en el aprendizaje de los estudiantes cuando prepara materiales adecuados, evalúa cada actividad y realiza con sus alumnos un análisis de los errores.

Las actividades realizadas incorporan nuevos procedimientos de análisis en temas de matemáticas. Procedimientos que no sólo son útiles para la resolución de las funciones exponenciales y logarítmicas sino también para abordar otros temas. El método gráfico modifica los procesos de pensamiento de los alumnos. Éstos pasan de realizar un proceso que en su mayoría es mecánico (cuando llegan a la solución por métodos algebraicos), a un proceso de observación y deducción.

Los alumnos deben interpretar la información dada por el gráfico y conectarla a sus conocimientos previos de modo que puedan expresarla en términos algebraicos o en lenguaje natural para justificar las preguntas que se le formulan. Para lo cual necesitan, comprender lo que representan los signos o símbolos matemáticos y su relación con el objeto matemático representado. Enfrentar a los alumnos con situaciones sencillas como las aquí propuestas, les hará más fácil el camino para coordinar, sin contradicciones, diferentes registros de representación.

Bibliografía

Anderson, J. R., Reder, L. M. y Simon, H. A. (2001). Educación: el constructivismo radical y la psicología cognitiva. *Estudios Públicos*, 81, 89-128. Recuperado el 27 de mayo, 2004 de www.cepchile.cl/dms/archivo_1805_882/rev81_anderson.pdf

Berenson, M. L. y Levine, D. M. (1996). *Estadística Básica en Administración: conceptos y aplicaciones*. (6ª. ed.). México: Prentice Hall Hispanoamericana.

Coll, C. (2003). La teoría genética y los procesos de construcción del conocimiento en el aula. En: *Piaget en la educación*. México: Paidós.

De la Rosa, A. (2001). *La calculadora y los sistemas semióticos de representación*. Revista Electrónica de Didáctica de las Matemáticas Xixim, Año 2, No. 1, julio 2001.

Duval, R. (2002). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. En: F. Hitt (ed.), *Representations and Mathematics Visualization* (pp. 311-335). México: Cinvestav-IPN.

Duval, R. (1998). *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento.* En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en matemática Educativa II* (pp. 173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval, R. (1997) *Investigaciones en Matemática Educativa II.* Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. Grupo Editorial Iberoamericano. México.

Duval, R. (1992). Gráficas y ecuaciones: la articulación de dos registros. En R. Cambray, E. Sánchez y G. Zubieta (Eds.), *Antología en Educación Matemática* (pp. 125-139). México: SME-CINVESTAV-IPN.

Ernest, P. (1994). Variedades de constructivismo: sus metáforas, epistemologías e implicaciones pedagógicas. *Hiroshima Journal of mathematics education*. 2, 1-14. Traducción de Juan D. Godino. Recuperado el 27 de mayo, 2004 de

www.ugr.es/~seiem/Documentos/Ernest_Constructivismo.doc

Fennell, F. & Rowan, T. (2001). Representation: an important process for teaching and learning mathematics. *Teaching Children Mathematics*, 7 (5), 288-292. Recuperado el 1 de abril de 2004, de la base de datos Wilson Web.

Hitt, F. (1998) Visualización matemática. Representaciones, nuevas tecnologías y currículum. *Educación Matemática*, 10 (2), 23-45. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Hitt, F. (2002). *Funciones en contexto*. México: Prentice Hall.

Hitt, F. (2003). Una reflexión sobre la construcción de conceptos matemáticos en ambientes con tecnología. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*. 10 (2) 213-223.

Holmes, S. (2004). What does it say to you. *Mathematics teaching*, 186, 14-17. Recuperado el 7 de mayo de 2004, de la base de datos Wilson Web.

Kaput, J. (1998). Representations, inscriptions, descriptions and learning: A Kaleidoscope of Windows. *Journal of mathematical behavior*, 17 (2) , 266-281.

Lowrie, T. & Russell, K. (2001). Relationship between visual and nonvisual solution methods and difficulty in elementary mathematics. *The journal of educational research*, 94 (4) 248-255. Recuperado el 1 de abril de 2004, de la base de datos Wilson Web.

Lupiáñez, J.L. y Moreno, L.E, (2001). Tecnología y representaciones semióticas en el aprendizaje de las matemáticas. En: P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática homenaje al profesor Mauricio Castro* (291-300). España: Editorial Universidad de Granada. Recuperado el 11 de julio, 2004 de http://www.uv.es/Angel.Gutierrez/archivos1/doctorado/Homenaje/20LupiannezJL.PDF

Pape, S. & Tchoshanov, M. A. (2001). The role of representation(s) in developing mathematical understanding. *Theory into practice*, 4 (2), 118-127. Recuperado el 1 de abril de 2004, de la base de datos Wilson Web.

Pluvinage, F. (1998). Los objetos matemáticos en la adquisición del razonamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en matemática Educativa II* (pp. 1-15). México: Grupo Editorial Iberoamérica

Pozo, J. I. (1999). *Teorías cognitivas del aprendizaje*. Sexta edición. España: Ediciones Morata.

Preston, R. V. y Garner, A. S. (2003). Representation as a vehicle for solving and communicating. *Teaching in the middle school*, 9 (1), 38-43.

Rico, L. (2000). *Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática*. Recuperado el 28 de Agosto de 2003, de http://www.ugr.es/~seiem/Actas/Huelva/LRico.htm

Sandoval, C.I. y Díaz Barriga, A.E. (2002). Ecuaciones diferenciales de 1er orden una perspectiva didáctica con geometría dinámica. *Memorias de la XII semana regional de investigación y docencia en matemática*. Universidad de Sonora. pp. 189-196

Santrock, J. W. (2002). *Psicología de la educación*. Méxco: McGraw-Hill.

Sierra, G. (2000) *Hacia una explicación sistemática de los fenómenos didácticos. El caso de las convenciones didácticas en el tratamiento de los exponentes no naturales*. México: CINVESTAV.

Tchoshanov, M. A. (2002). Representation and cognition: Internalizing mathematical concepts. En: F. Hitt (ed.), *Representations and Mathematics Visualization* (pp. 207-217). México: Cinvestav-IPN.

Ursini, S. (1996). Una perspectiva social para la educación matemática. La influencia de la teoría de L. S. Vygotsky. *Educación Matemática*, 8 (3), 42-49. México: Grupo Editorial Iberoamérica

Zimmermann, W. & Cunningham, S. (1991). What is mathematical visualization? En W. Zimmerman y S. Cunningham (eds.), *Visualization in Teaching and mathematics. (*pp. 1-8). USA, MAA Series.

Apéndice A
Funciones Exponencial y Logarítmica
Estructura de las actividades de aprendizaje

Sesión 1 (23-04-2007)
Tema: Prácticas con Winplot en la construcción de las gráficas de funciones.

Objetivos: Introducir a los alumnos al manejo de los recursos de Winplot para la construcción de las gráficas de funciones. Al finalizar la actividad los alumnos serán capaces de construir las gráficas de las funciones con Winplot.

Actividades de profesor	Actividades de alumnos	Materiales
1. Da a conocer los objetivos del experimento. 2. Entrega materiales. 3. Forma equipos. 4. Instruye sobre el trabajo con Winplot. 5. Responde a las preguntas y aclara dudas de los alumnos. 6. Observa y apoya los alumnos en las actividades con Winplot.	1. Leen y realizan las actividades del manual de Winplot. Extraclase: 1. Leen la lectura 1 "breve historia de las funciones logarítmicas y exponenciales y sus aplicaciones en la ciencia" 2. En la bibliografía y en la Internet hacen una búsqueda de las diferentes aplicaciones a la ciencia de las funciones exponencial y logarítmica. 3. Escriben sus resultados (de 2 a 4 ejemplos) en las representaciones gráfica y analítica.	1. Manual de Wintplot. 2. lectura 1 3. Hojas para el registro de los datos sobre el trabajo con Winplot.

Sesión 2 (24-04-.2007)
Tema: Breve historia de las funciones logarítmica y exponencial y sus aplicaciones en ciencias

Objetivos: Introducir a los alumnos a la historia del desarrollo y la aplicación de las funciones logarítmica y exponencial en ciencias. Motivar y despertar interés para el aprendizaje de las funciones logarítmica y exponencial.

Actividades de profesor	Actividades de alumnos	Materiales
1. Da a conocer los objetivos de la Actividad 1. 2. Responde a las preguntas y aclara dudas de los alumnos. 3. Observa y apoya a los alumnos en la Actividad 1. 4. Selecciona equipos para presentación de trabajos. 4. Organiza y dirige la presentación, discusión y evaluación de los trabajos de equipos.	1. En equipo presentan y discutan los ejemplos de las diferentes aplicaciones a la ciencia de las funciones exponencial y logarítmica. 2. En equipo preparan una presentación de de las aplicaciones a la ciencia de las funciones exponencial y logarítmica. 3. Entregan al profesor el trabajo de cada equipo. 4. Algunos equipos hacen presentación de sus trabajos a todo el grupo. 5. Hacen comentarios y preguntas sobre la presentación. 6. Bajo la dirección del profesor evalúan los trabajos presentados. Extraclase: Leen la lectura 2 función exponencial y sus propiedades (enfoque analítico, gráfico y verbal)	1. Hojas para el registro de los datos sobre el trabajo en equipo. 2. cartulinas, plumones y cañón 3.Lectura 2

Sesión 3 (25-04-2007)
Tema: Función exponencial y sus propiedades (enfoque analítico gráfico y verbal).

Objetivos: Dar a conocer la función exponencial y sus propiedades (la forma analítica gráfica y verbal). Al finalizar la actividad los alumnos serán capaces de definir y graficar la función exponencial y describir sus propiedades (dominio, rango, carácter creciente y decreciente) a partir de su fórmula, dominar leyes de los exponentes y realizar las operaciones.

Actividades de profesor	Actividades de alumnos	Materiales
1. Da a conocer los objetivos de la Actividad 2 2. Responde a las preguntas y aclara dudas de los alumnos sobre la actividad extraclase. 3. Observa y apoya a los alumnos en la actividad 2. 4. Selecciona equipos para presentación de trabajos. 4. Organiza y dirige la presentación, discusión y evaluación de los trabajos de equipos.	1. En equipo realizan, discutan y presentan. La actividad 2. 2. En equipo preparan una presentación de la función exponencial y sus propiedades (enfoque analítico gráfico y verbal). 3. Entregan al profesor el trabajo de cada equipo. 4. Algunos equipos hacen presentación de sus trabajos a todo el grupo. 5. Hacen comentarios y preguntas sobre la presentación. 6. Bajo la dirección del profesor evalúan los trabajos presentados. Extraclase: Leer la lectura 3 traducción entre las representaciones analíticas, gráficas y verbales de la función exponencial y sus propiedades.	1. Actividad 2 2. Hojas para el registro de los datos sobre el trabajo en equipo. 3. Lectura 3

Sesión 4 (27-04-2007)
Tema: Traducción entre las representaciones analíticas, gráficas y verbal de la función exponencial y sus propiedades.

Objetivos: Al finalizar la actividad los alumnos serán capaces de graficar la función exponencial, dominar leyes de los exponentes y realizar las operaciones en forma analítica, gráfica y verbal. Analizar el comportamiento gráfico y analítico de las funciones exponenciales. Pasar con facilidad de una representación a otra.

Actividades de profesor	Actividades de alumnos	Materiales
1. Da a conocer los objetivos de la Actividad 3 2. Responde a las preguntas y aclara dudas de los alumnos sobre las actividades extraclase. 3. Observa y apoya a los alumnos en la Actividad 3. 4. Selecciona equipos para presentación de trabajos. 4. Organiza y dirige la presentación, discusión y evaluación de los trabajos de equipos	1. En equipo realizan (programa winplot), discutan y presentan. La actividad 3. 2. En equipo preparan una presentación de la traducción entre las representaciones analíticas, gráficas y verbales de la función exponencial y sus propiedades. 3. Entregan al profesor en un disket el trabajo de cada equipo. 4. Unos equipos hacen presentación de sus trabajos a todo el grupo. 5. Hacer comentarios y preguntas sobre la presentación. 6. Bajo la dirección del profesor evalúan los trabajos presentados. Extraclase: Leer la lectura 4 función logarítmica y sus propiedades (enfoque analítico gráfico y verbal).	1. Actividad 3 3. Disquete 4. Hojas para el registro de los datos sobre el trabajo en equipo. 5. Lectura 4

Sesión 5 (28-04-2007)
Tema: Función logarítmica y sus propiedades (enfoque analítico, gráfico y verbal).

Objetivos: Dar a conocer la función logarítmica y sus propiedades (la forma analítica, gráfica y verbal). Al finalizar la actividad los alumnos serán capaces de definir y graficar la función logarítmica y describir sus propiedades (dominio, rango, carácter creciente y decreciente) a partir de su fórmula.

Actividades de profesor	Actividades de alumnos	Materiales
1. Da a conocer los objetivos de la Actividad 4 2. Responde a las preguntas y aclara dudas de los alumnos sobre las actividades extraclase. 3. Observa y apoya a los alumnos en la Actividad 4. 4. Selecciona equipos para presentación de trabajos. 4. Organiza y dirige la presentación, discusión y evaluación de los trabajos de equipos	1. En equipo realizan, discutan y presentan la actividad 4. 2. En equipo preparan una presentación de la función logarítmica y sus propiedades (enfoque analítico, gráfico y verbal). 3. Entregan al profesor el trabajo de cada equipo. 4. Unos equipos hacen presentación de sus trabajos a todo el grupo. 5. Hacer comentarios y preguntas sobre la presentación. 6. Bajo la dirección del profesor evalúan los trabajos presentados. Extraclase: Leer la lectura 5 traducción entre las representaciones analíticas, gráficas y verbales de la función logarítmica y sus propiedades.	1. Actividad 4 2. Hojas para el registro de los datos sobre el trabajo en equipo. 3. Lectura 5

Sesión 6 (2-05-2007)
Tema: Traducción entre las representaciones analíticas, gráficas y verbales de la función logarítmica y sus propiedades.

Objetivos: Al finalizar la actividad los alumnos serán capaces de graficar la función logarítmica, analizar el comportamiento gráfico y analítico de las funciones, saber pasar con facilidad de una representación a otra.

Actividades de profesor	Actividades de alumnos	Materiales
1. Da a conocer los objetivos de la Actividad 5 2. Responde a las preguntas y aclara dudas de los alumnos sobre la actividad extraclase. 3. Observa y apoya a los alumnos en la Actividad 5. 4. Selecciona equipos para presentación de trabajos. 4. Organiza y dirige la presentación, discusión y evaluación de los trabajos de equipos	1. En equipo realizan (programa winplot), discutan y presentan. La actividad 5. 2. En equipo preparan una presentación de la traducción entre las representaciones analíticas, gráficas y verbales de la función logarítmica y sus propiedades. 3. Entregan al profesor en un disket el trabajo de cada equipo. 4. Unos equipos hacen presentación de sus trabajos a todo el grupo. 5. Hacer comentarios y preguntas sobre la presentación. 6. Bajo la dirección del profesor evalúan los trabajos presentados. Extraclase: Leer la lectura 6 solución, analítica de ecuaciones logarítmicas y exponenciales	1. Actividad 5 3. Disket 4. Hojas para el registro de los datos sobre el trabajo en equipo. 5. Lectura 6

Sesión 7 (3-05-2007)
Tema: Solución analítica de ecuaciones logarítmicas y exponenciales

Objetivos: Al finalizar la actividad los alumnos serán capaces de resolver analíticamente ecuaciones logarítmicas y exponenciales y verificar su solución.

Actividades de profesor	Actividades de alumnos	Materiales
1. Da a conocer los objetivos de la Actividad 6 2. Responde a las preguntas y aclara dudas de los alumnos sobre la lectura 6. 3. Observa y apoya a los alumnos en la Actividad 6. 4. Selecciona equipos para presentación de trabajos. 4. Organiza y dirige la presentación, discusión y evaluación de los trabajos de equipos	1. En equipo realizan, discutan y presentan. La actividad 6. 2. En equipo preparan una presentación las soluciones analíticas de las ecuaciones logarítmicas y exponenciales. 3. Entregan al profesor el trabajo de cada equipo. 4. Unos equipos hacen presentación de sus trabajos a todo el grupo. 5. Hacer comentarios y preguntas sobre la presentación. 6. Bajo la dirección del profesor evalúan los trabajos presentados. Extraclase: Leer la lectura 7 solución grafica de ecuaciones logarítmicas y exponenciales	1. Actividad 6 3. Hojas para el registro de los datos sobre el trabajo en equipo. 4. Lectura 7

Sesión 8 (4-05-2007)
Tema: Solución grafica de ecuaciones logarítmicas y exponenciales

Objetivo: Al finalizar la actividad los alumnos serán capaces de resolver ecuaciones logarítmicas y exponenciales y verificar su solución gráficamente.

Actividades de profesor	Actividades de alumnos	Materiales
1. Da a conocer los objetivos de la Actividad 7 2. Responde a las preguntas y aclara dudas de los alumnos sobre la lectura 7. 3. Observa y apoya a los alumnos en la Actividad 7. 4. Selecciona equipos para presentación de trabajos. 4. Organiza y dirige la presentación, discusión y evaluación de los trabajos de equipos	1. En equipo realizan (programa winplot), discutan y presentan. La actividad 7 2. En equipo preparan una presentación de las soluciones gráficas de las ecuaciones logarítmicas y exponenciales. 3. Entregan al profesor en un disket el trabajo de cada equipo. 4. Unos equipos hacen presentación de sus trabajos a todo el grupo. 5. Hacer comentarios y preguntas sobre la presentación. 6. Bajo la dirección del profesor evalúan los trabajos presentados.	1. Actividad 7 3. Disket 4. Hojas para el registro de los datos sobre el trabajo en equipo.

Apéndice B

Manual de Winplot

Introducción

El objetivo de este manual, es el manejo del programa de winplot para la visualización de las funciones exponenciales y logarítmicas, a través de sus propiedades tales como dominio, rango, carácter de crecimiento e intersección con los ejes así como las operaciones.

En el manejo de los comandos encontramos:

1. Operaciones Básicas

La suma la indicamos con **+,** la resta con **-,** la multiplicación ***,** la división **/,** la exponenciación, **^**. Primero se introduce el número que se va a elevar a una potencia (la base), después el símbolo (que indica a qué potencia de la base) seguida del número. Si los números de la potencia contienen signos negativos o fracciones, se debe especificar la potencia entre paréntesis para que el número encerrado indique la potencia a la que hay que elevar la base (algunos teclados no traen el símbolo ^, en este caso se oprime alt + 94).

2. Introducción de operaciones

Winplot reconoce la notación algebraica. Por ejemplo, las funciones $f(x)=25x$ se introducen indistintamente como $25x$ ó $25*x$.

Para operar algebraicamente, se siguen las reglas del álgebra ordinaria en cuanto a las reglas de asociación, y en cuanto a la jerarquía de los operadores tiene mayor jerarquía que los operadores * y /; estos a su vez tiene mayor jerarquía que los operadores + y -.

3. Llamado de funciones básicas de la biblioteca de winplot

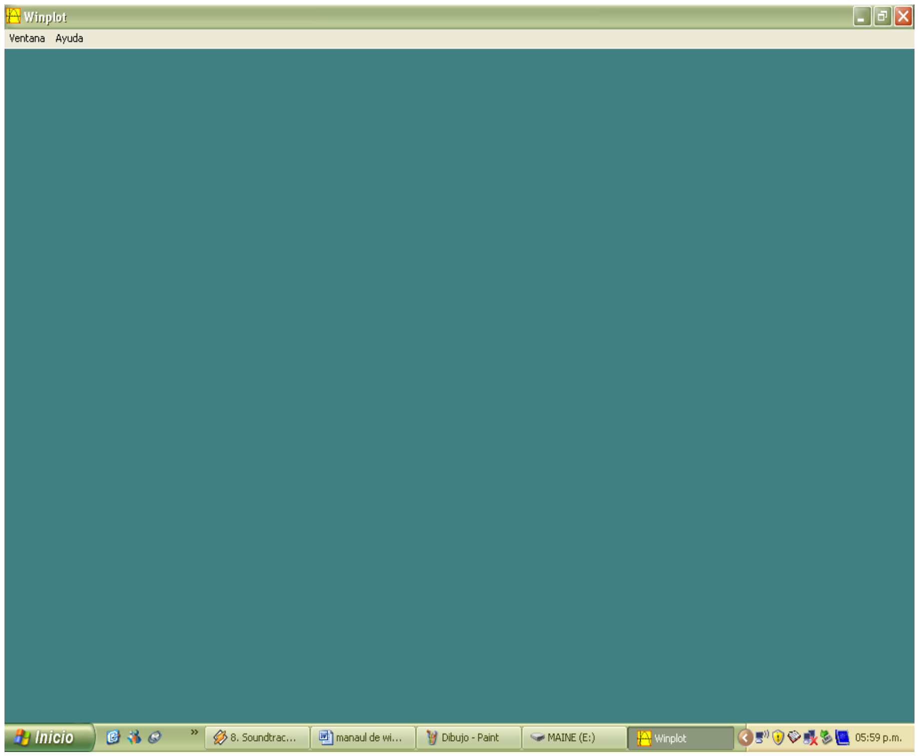
Existen también funciones básicas preconstruidas en la biblioteca algunas de ellas son:

- $\ln(x)$ para el logaritmo natural de *x*
- $\log(x)$ para el logaritmo de base 10 de *x*
- $\log(b,x)$ para el logaritmo de base *b*, con
- $\exp(x)$ para la exponencial de *x*
- $sqr(x)$ es la raíz cuadrada de *x* (para *x* > 0)
- $abs(x)$ para el valor absoluto de *x*

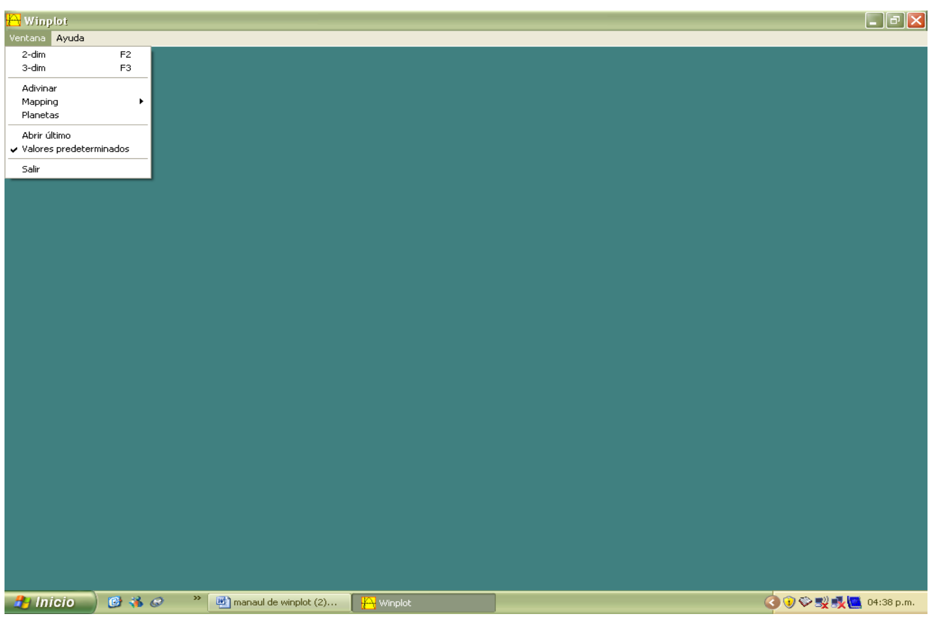
- *pi* para denotar el valor constante p = 3.1415926...

Debe notarse que el valor de los argumentos va siempre entre paréntesis, de otro modo Winplot no los reconoce.

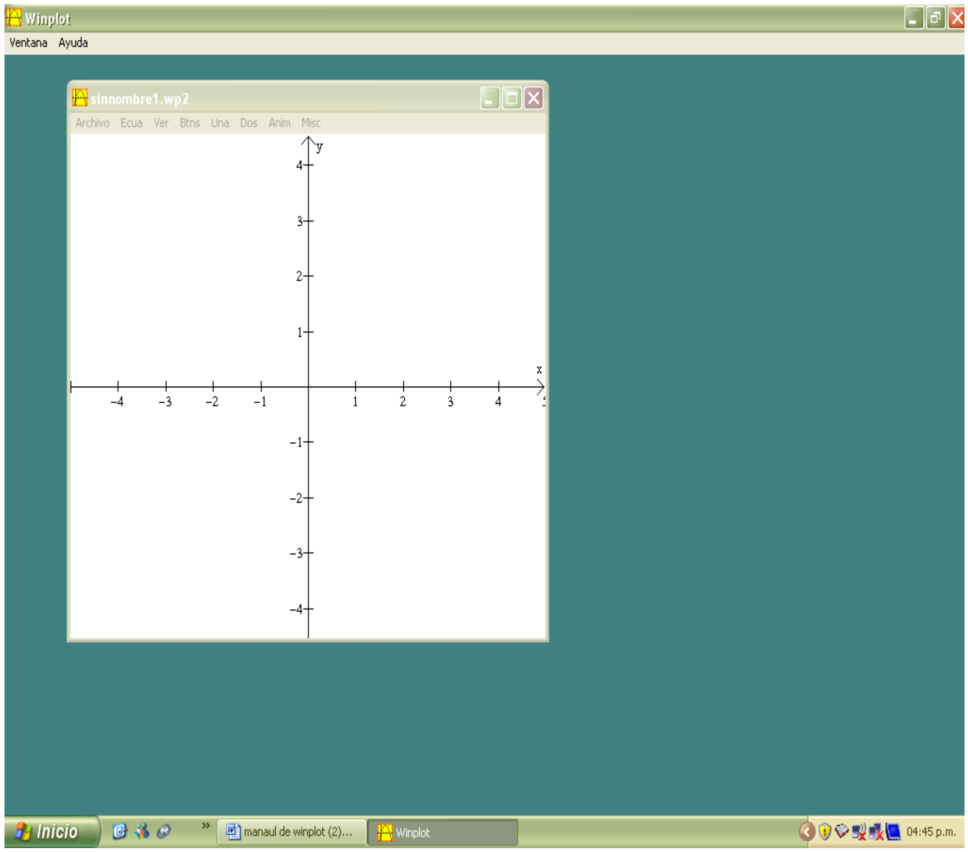
La primera vez que accede a **winplot**, aparece una pantalla como esta donde se distinguen dos menús: **ventana** y **ayuda**.



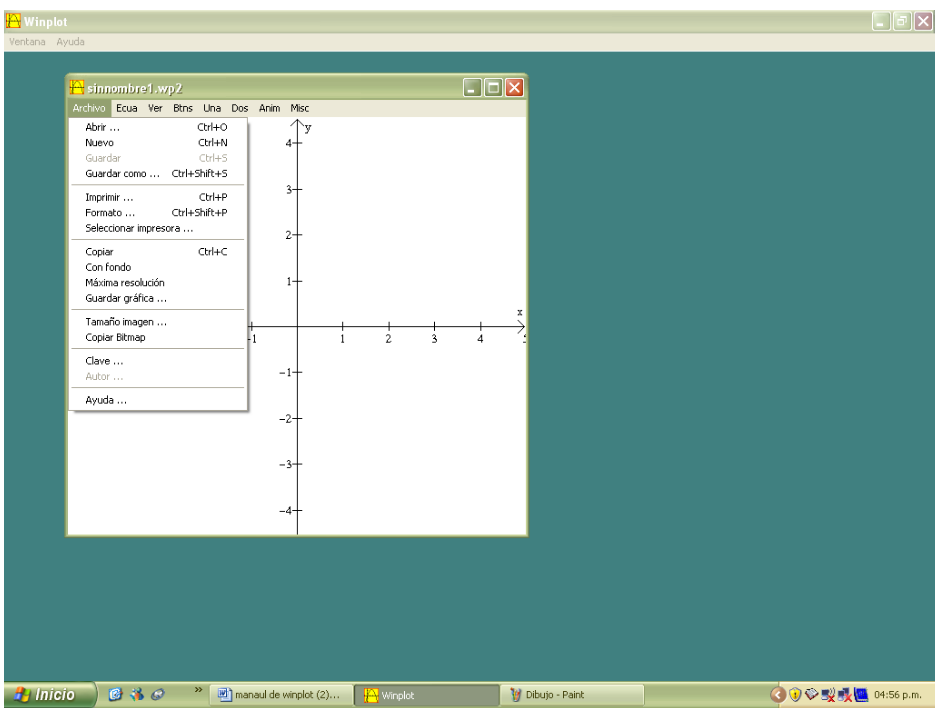
Si damos un doble clic en el botón izquierdo del ratón en ventana obtenemos la pantalla:



En **2-dim** obtenemos una ventana nueva que tiene nombre por omisión sinnombre 1.wp2 en esta nueva pantalla aparece los menús: Archivo, Ecuación, Ver, Btns, Una, Dos, Anim, Misc.



Al activar Archivo obtenemos la pantalla

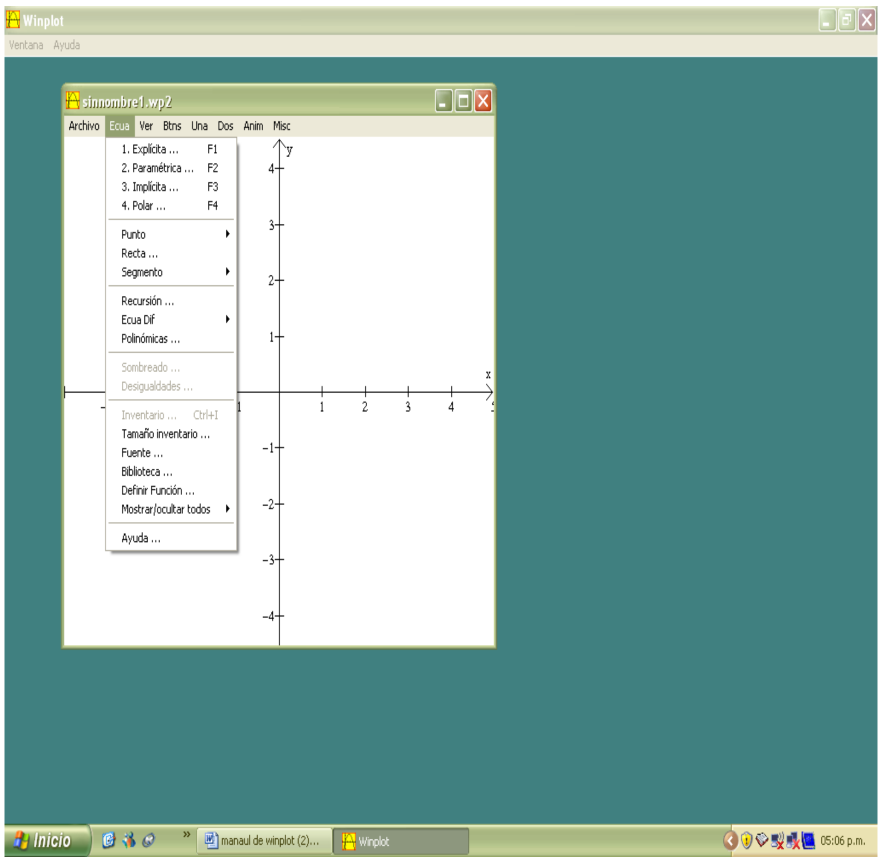


Donde encontramos las opciones para abrir, guardar, imprimir, copiar.

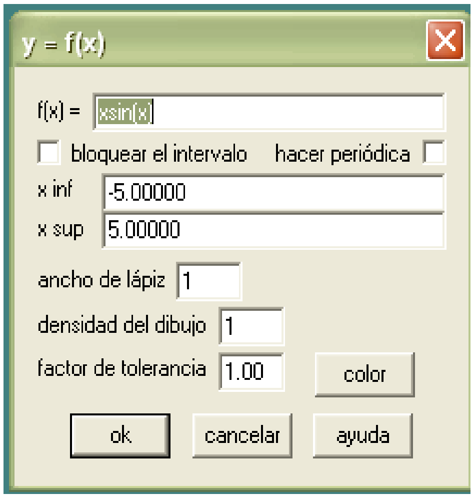
El manual esta creado solo para graficar las funciones exponenciales y logarítmicas nos concentraremos solo en lo más necesario para sus gráficas.

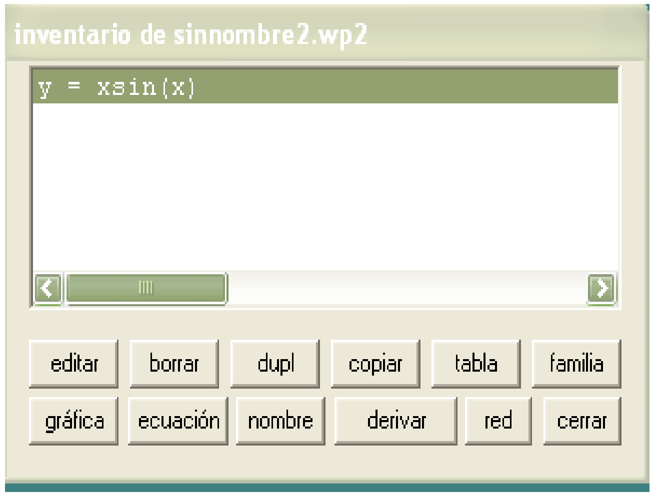
Copiar, Cuando se activa esta opción (que sustituye a la acción ctrl+C), se manda una imagen al portapapeles de Windows, desde donde podemos "pegarla" a cualquier aplicación Windows (en la mayoría de las aplicaciones, es posible pegar usando la combinación ctrl+V o seleccionando la opción pegar del menú Edición).

El siguiente menú es Ecua solo nos interesa los iconos de comando explicita y punto.



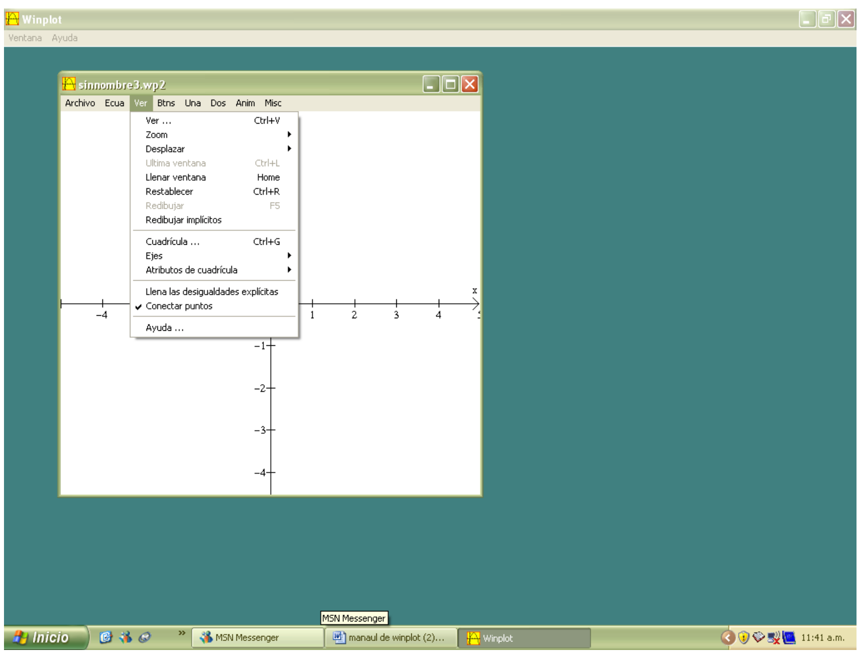
Al activar ecuación explicita aparece una caja de dialogo $y = f(x)$, donde podrás anotar la función que deseas graficar.

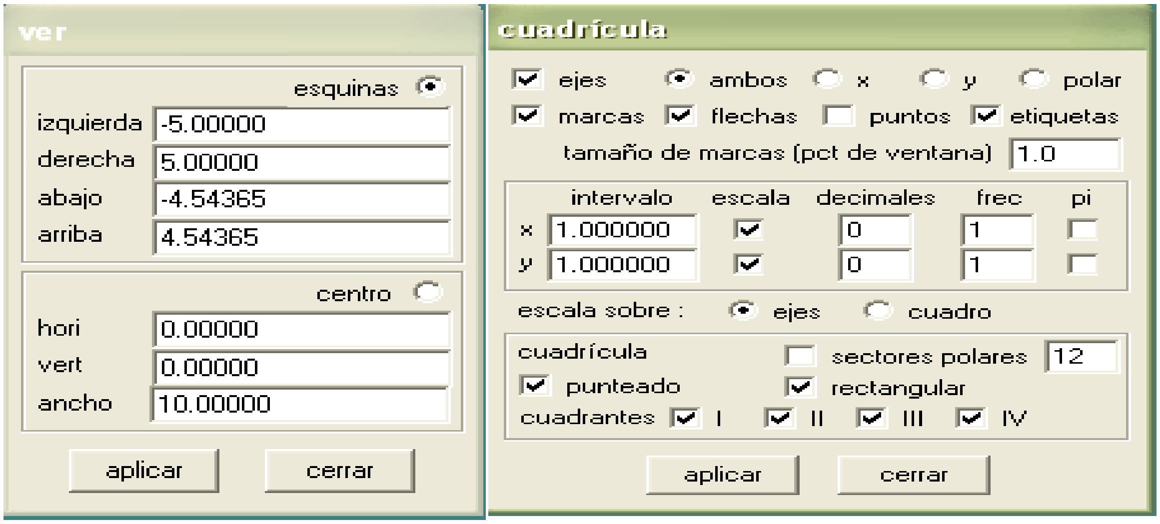




Después de escribir la ecuación y activar OK, aparece Otra caja de dialogo llamada inventario, donde aparecen los botones; editar, se utiliza para volver editar la función escrita; borrar, borra la función y la gráfica; dupl, en el mismo eje coordenado se puede hacer más de una función; tabla, muestra los valores de las ordenadas y abscisas; ecuación, muestra en la ventana de la gráfica la función en forma analítica.

El siguiente menú es ver. Si activas ver y ejes obtienes dos cajas de dialogo como las siguientes.





Ver te muestra graficarte los valores del dominio *x* y rango *y*, puedes modificarlos de acuerdo a tus necesidades; cuadricula te ayuda a visualizar los puntos importantes de la gráfica (deben de estar activados con una palomita si no están activados tú los activas con un clic), dentro de la caja de dialogo de cuadricula está el comando intervalos con este comando puedes modificar las escalas de los ejes.

4. Actividades de introducción

Con ayuda de winplot grafica las siguientes funciones, represéntalas en el mismo sistema cartesiano, representa con puntos la intersecciones con los ejes de cada una, así como la intersección de las tres funciones.

a) $f(x)=2x$ **b)** $g(x)=x^2$ **c)** $h(x)=2^x$

1. Selecciona con dos clics en el botón izquierdo del ratón el icono de "winplot" (para abrir el programa).

2. Selecciona con un clic el menú "ventana", activa "2 dim"**.**

3. Selecciona con un clic el menú "Ecua", activa "explicita".

4. En la caja de dialogo $y=f(x)$, introduce la función $f(x)=2x$, (puedes hacer tus graficas de colores en la caja de dialogo aparece la opción color) activa OK.

5. Para graficar la segunda función $g(x) = x^2$ en la caja de dialogo “inventario”, activa el formato “dupl” sin borrar la original., editas la segunda función, para la tercera función repites el mismo procedimiento.

6. Selecciona con un clic el menú “ver” activa “cuadricula” selecciona punteado rectangular, con la cuadricula activada podrás visualizar los puntos de corte entre las gráficas y los ejes. Selecciona el menú “ecua” activa “punto (x,y)” en la caja de dialogo anota la ordena y abscisa del punto buscado.

d) grafica en winplot $\log_3 x$, destaca con colores diferentes los puntos (3,1); (9,2); (27,3); (253,5). Utiliza la caja de dialogo “cuadricula” para cambiar los intervalos.

e) Grafica $y = (1.5)^x$, y = 3^{-x}

Criterios de evaluación

Para evaluar solución de cada ejercicio se asigna un puntaje de acuerdo al siguiente criterio:

Nivel	Mal	Regular	Bien	Excelente
Puntaje	0	1	2	3
Criterio	No hay solución o solución Incorrecta	Solución incompleta y contiene errores	Solución completa con pocos errores	Solución completa sin errores

Apéndice C

Cuaderno de trabajo

Prácticas con Winplot en la las graficación de funciones

Objetivo: Introducir a los alumnos al manejo de los recursos de Winplot para construcción de las gráficas de funciones.

Instrucciones: Con ayuda de Winplot graficar las siguientes funciones, represéntalas en el mismo sistema cartesiano, representa con puntos la intersecciones con los ejes de cada una, así como la intersección de las tres funciones.

a) $f(x)=2x$ **b)** $g(x)=x^2$ **c)** $h(x)=2^x$

1**.** Selecciona con dos clics en el botón izquierdo del ratón el icono de “winplot” (para abrir el programa).
2**.** Selecciona con un clic el menú “ventana”, activa “2 dim”**.**
3**.** Selecciona con un clic el menú “Ecua”, activa “explicita”.
4. En la caja de dialogo $y=f(x)$, introduce la función $f(x)=2x$, (puedes hacer tus graficas de colores en la caja de dialogo aparece la opción color) activa OK.
5. Para graficar la segunda función $g(x)=x^2$ en la caja de dialogo “inventario”, activa el formato “dupl” sin borrar la original., editas la segunda función, para la tercera función repites el mismo procedimiento.
6. Selecciona con un clic el menú “ver” activa “cuadricula” selecciona punteado rectangular, con la cuadricula activada podrás visualizar los puntos de corte entre las gráficas y los ejes. Selecciona el menú “ecua” activa “punto (x,y)” en la caja de dialogo anota la ordena y abscisa del punto buscado.

d) grafica en winplot $\log_3 x$, destaca con colores diferentes los puntos (3,1); (9,2); (27,3); (253,5). Utiliza la caja de dialogo “cuadricula” para cambiar los intervalos.

e) Grafica $y=(1.5)^x$, y = 3^{-x}

Criterios de evaluación

Para evaluar solución de cada ejercicio se asigna un puntaje de acuerdo al siguiente criterio:

Nivel	**No satisfactorio**	**Satisfactorio**	**Bueno**
Puntaje	0	1	2
Criterio	Incorrecto	Contiene errores	Correcto

Actividad extraclase

1. Leer la Lectura 1 “Breve historia de las funciones logarítmicas y exponenciales y sus aplicaciones en la ciencia”.
2. Hacer una búsqueda en la bibliografía y en Internet sobre las diferentes aplicaciones a la ciencia de las funciones exponencial y logarítmica.

3. Escribir sus resultados (de 2 a 4 ejemplos) en las representaciones gráfica y analítica.

Actividad 1. Breve historia de las funciones logarítmica y exponencial y sus aplicaciones en ciencias

Objetivo

1. Introducir a los alumnos a la historia de desarrollo y la aplicación de las funciones logarítmica y exponencial en ciencias.
2. Motivar y despertar interés para el aprendizaje de las funciones logarítmica y exponencial.
3. Dar a conocer algunos aspectos de las funciones tales como variable, la forma gráfica, carácter de crecimiento y las representaciones analíticas y graficas

Instrucciones

1. En equipo discutan la actividad extractase; así como la asociación, la dependencia e independencia de variables, concluyan cómo son las gráficas de las funciones exponencial y logarítmica. (forma, intersecciones con los ejes de coordenadas, características de su crecimiento).
2. el director promueve la participación de los integrantes. El secretario recopila las aportaciones. Preparan y hacen una presentación del mejor trabajo de las aplicaciones a la ciencia de las funciones exponencial y logarítmica.
3. Hacer comentarios y preguntas sobre la presentación.
4. Bajo la dirección del profesor evalúan los trabajos presentados.
5. Entregan al profesor el trabajo de cada equipo.

Extraclase

1. Leer la Lectura 2 "Función exponencial y sus propiedades (enfoque analítico, verbal y gráfico)".

Actividad 2. Función exponencial y sus propiedades (enfoque analítico, gráfico y verbal)

Objetivo

1. Dar a conocer la función exponencial y sus propiedades (la forma analítica y verbal).
2. Dar a conocer gráficas de las funciones exponenciales y sus propiedades.
3. Realizar operación con funciones.

Instrucciones

1. En equipo discutan la actividad extractase definición de la función exponencial ($b>0$ y $b \neq 1$), las propiedades de las funciones (dominio, rango, intersección con los ejes, carácter de crecimiento) y las operaciones con funciones.
2. Resuelvan las actividades propuestas en el ejercicio 2. El director promueve la participación de los integrantes. El secretario recopila las aportaciones. Preparan y

hacen una presentación de los resultados de la función exponencial y sus propiedades
3. Hacen comentarios y preguntas sobre la presentación.
4. Bajo la dirección del profesor evalúan los trabajos presentados.
5. Entregan al profesor el trabajo de cada equipo.

Ejercicios 2

Determina y describa en forma analítica, verbal y gráfica el dominio, rango, carácter de crecimiento e intersección con los ejes de coordenadas de las cada las funciones:

a) $m = y \cdot h$, **b)** $z = y * y$, si $y = 2^x$ y $h = 2^{2x}$

c) $j = t \cdot k$, **d)** $w = t * t$, si $t = 2^{-x}$ y $k = 2$

Criterios de evaluación

Para evaluar la solución de cada ejercicio se asigna un puntaje de acuerdo al siguiente criterio:

Nivel	**No satisfactorio**	**Satisfactorio**	**Bueno**
Puntaje	0	1	2
Criterio	Incorrecto	Contiene errores	Correcto

Actividad extraclase

1. Leer la Lectura 3 “Traducción entre las representaciones analíticas, gráficas y verbales de la función exponencial y sus propiedades”.

Actividad 3. Traducción entre las representaciones analíticas, gráficas y verbal de la función exponencial y sus propiedades.

Objetivo

1. Analizar el comportamiento gráfico y analítico de las funciones exponenciales
2. Pasar con facilidad de una representación a otra.

Instrucciones

1. En equipo realizan (programa winplot), discutan y presentan. El ejercicio 3.
2. En equipo preparen una síntesis de las diferentes representaciones analítica, gráfica y verbal de la función exponencial $y = b^x$ y sus propiedades.
3. El director promueve la participación de los integrantes. El secretario recopila las aportaciones preparan una presentación de la traducción entre las representaciones analíticas, gráficas y verbales de la función exponencial y sus propiedades.
4. Entregan al profesor en un disket el trabajo de cada equipo.
5. Unos equipos hacen presentación de sus trabajos a todo el grupo.
6. Hacer comentarios y preguntas sobre la presentación.
7. Bajo la dirección del profesor evalúan los trabajos presentados.

Ejercicios 3.

a. Resuelve en forma analítica y verbal intersecciones, dominio, rango, carácter de crecimiento la función $y = 3^{2x}$. ¿De qué otra forma se puede representar?

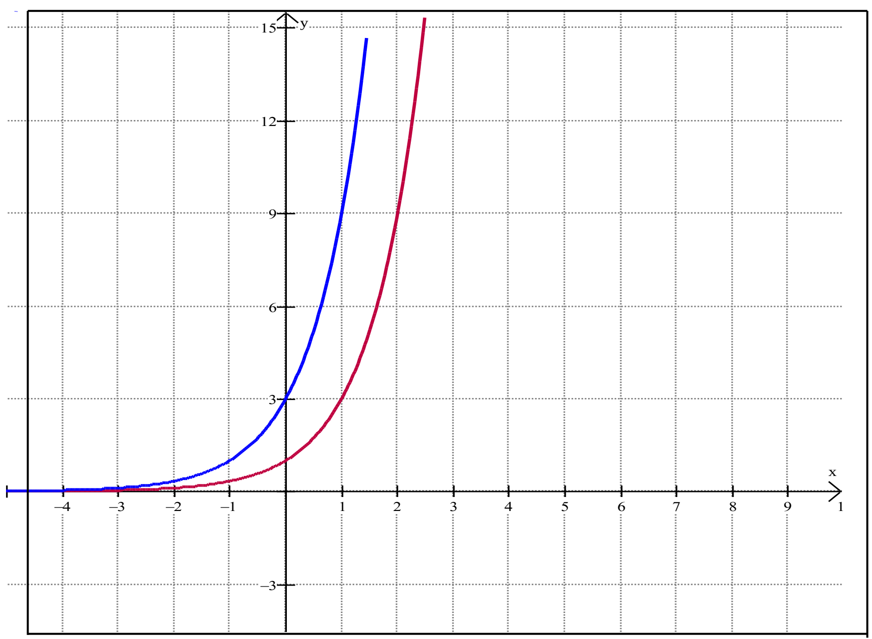
b. Sean las funciones $y = 2^x, m = 5^x$

¿En qué punto se cortan ambas funciones?

¿En qué intervalo del dominio la función $m=5^x$ se encuentra por encima de la función $y = 2^x$?

¿En qué intervalo se encontrará por debajo?

c. Dadas las gráficas que te presentamos ¿Cuál de ellas presenta menor base? Justifica tu respuesta.



Criterios de evaluación

Para evaluar la solución de cada ejercicio se asigna un puntaje de acuerdo al siguiente criterio:

Nivel	**No satisfactorio**	**Satisfactorio**	**Bueno**
Puntaje	0	1	2
Criterio	Incorrecto	Contiene errores	Correcto

Actividad Extraclase

1. Leer la Lectura 4 "Función logarítmica y sus propiedades (enfoque analítico, gráfico y verbal)"

Actividad 4. Función logarítmica y sus propiedades (enfoque analítico, gráfico y verbal).

Objetivo

1. Dar a conocer la función logarítmica y sus propiedades (la forma analítica, gráfica y verbal.

Instrucciones

1. En equipo realicen una discusión de la lectura 4: definición, las propiedades de las funciones, relacionar las bases de los logaritmos con las exponenciales, como es gráficamente una curva respecto a otra cuándo es pequeña la base.
2. En equipo realizan, discutan y presentan. El ejercicio 4.
3. El director promueve la participación de los integrantes. El secretario recopila las aportaciones preparan una presentación de la función logarítmica y sus propiedades (enfoque analítico, gráfico y verbal).
4. Entregan al profesor en un disket el trabajo de cada equipo.
5. Unos equipos hacen presentación de sus trabajos a todo el grupo.
6. Hacer comentarios y preguntas sobre la presentación.
7. Bajo la dirección del profesor evalúan los trabajos presentados.

Ejercicios 4

a). Sean las funciones $y = \log_5 x$, $y = \log_6 x$. Resuelve analíticamente.

¿En qué punto se cortan ambas funciones? ¿En qué intervalo del dominio se encuentra una función por encima de la otra. Y por debajo en que zona?

b). En la función $y = \log_4 x$, representada en el ejercicio anterior. ¿Cuándo obtendremos logaritmos mayores que cero? ¿Y menores que cero?

c). ¿Cuál es la inversa de $y = \log_4 x$?, expresa las dos funciones en forma analítica y verbal.

d). Comprueba graficando, los resultados de los incisos a), b) y c).

e). Compara las gráficas $y = -\log_2 x$, $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ y $y = -\log_5 x$, $y = \log_{\frac{1}{5}} x$ e).

Establece en forma analítica y verbal una conclusión general.

Criterios de evaluación

Para evaluar la solución de cada ejercicio se asigna un puntaje de acuerdo al siguiente criterio:

Nivel	**No satisfactorio**	**Satisfactorio**	**Bueno**
Puntaje	0	1	2
Criterio	Incorrecto	Contiene errores	Correcto

Actividad Extraclase

1. Leer la lectura 5 “traducción entre las representaciones analíticas, gráficas y verbales de la función logarítmica y sus propiedades”

Actividad 5. Traducción entre las representaciones analíticas, gráficas y verbales de la función logarítmica y sus propiedades.

Objetivo

1. Analizar el comportamiento gráfico y analítico de las funciones logarítmicas
2. Pasar con facilidad de una representación a otra.

Instrucciones

1. En equipo realizan (programa winplot), discutan y presentan. El ejercicio 5.
2. En equipo preparen una síntesis de las diferentes representaciones analítica, gráfica y verbal de la función exponencial $y = \log_b x$ y sus propiedades.
3. El director promueve la participación de los integrantes. El secretario recopila las aportaciones preparan una presentación de la traducción entre las representaciones analíticas, gráficas y verbales de la función exponencial y sus propiedades.
4. Entregan al profesor en un disket el trabajo de cada equipo.
5. Unos equipos hacen presentación de sus trabajos a todo el grupo.
6. Hacer comentarios y preguntas sobre la presentación.
7. Bajo la dirección del profesor evalúan los trabajos presentados.

Ejercicios 5

a) Si podemos expresar el logaritmo en base 8, en función del logaritmo en base 2, mediante la relación $y = \log_8 x \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}\log_2 x$, gráfica y explica como obtenemos esa expresión. Encuentren alguna relación entre las representaciones gráficas del logaritmo en base 8 y el logaritmo en base 2, de acuerdo a la relación anterior.

b) Con base en los resultados obtenidos de a), expresen la función $y = \log_9 x$ en la base 3, comprueben graficando

c) Las funciones $y = \log x$, $y = \log x^2$. ¿Son iguales?, expliquen cuál es el dominio de cada una de ellas.

Criterios de evaluación

Para evaluar la solución de cada ejercicio se asigna un puntaje de acuerdo al siguiente criterio:

Nivel	**No satisfactorio**	**Satisfactorio**	**Bueno**
Puntaje	0	1	2
Criterio	Incorrecto	Contiene errores	Correcto

Actividad Extraclase

1. Leer la lectura 6 "Solución, analítica de ecuaciones logarítmicas y exponenciales"

Actividad 6. Solución analítica de ecuaciones logarítmicas y exponenciales

Objetivo

1. Resolver analíticamente ecuaciones logarítmicas y exponenciales
2. Verificar la solución de las ecuaciones logarítmicas y exponenciales.

Instrucciones

1. En equipo realicen una discusión de la lectura 6: la relación $b^{x_1} = b^{x_2}$ entonces $x_1 = x_2$ y $\log x_1 = \log x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$, el cómo sería la solución grafica de la ecuaciones exponenciales y logarítmicas, diferencia entre una función y una ecuación.

2. En equipo resuelvan las actividades propuestas en el ejercicio 6.
3. El director promueve la participación de los integrantes. El secretario recopila las aportaciones preparan una presentación de la traducción entre las representaciones analíticas, gráficas y verbales de la función exponencial y sus propiedades.
4. Entregan al profesor en un disket el trabajo de cada equipo.
5. Unos equipos hacen presentación de sus trabajos a todo el grupo.
6. Hacer comentarios y preguntas sobre la presentación.
7. Bajo la dirección del profesor evalúan los trabajos presentados.

Ejercicios 6

a). $4^{x^2-11x+30}=16$ **b)** $3^{x+2}+3^{x+1}+3^{x}+3^{x-1}=120$ **c).** $9^{x}-2*3^{x}-3=0$

d). $\log(x^2+2x)=\log 3$ **d).** $\log(x+6)=1+\log(x+3)$ **e).** $\log(3-x^2)=\log 2+\log x$

Criterios de evaluación

Para evaluar los ejercicios se asigna un puntaje de acuerdo al siguiente criterio

Nivel	**Mal**	**regular**	**Bien**	**Excelente**
Puntaje	0	1	2	3
criterio	Incorrecto	Contiene errores	incompleto	Completo

Actividad Extraclase

1. Leer la lectura 7 "soluciones grafica de ecuaciones logarítmicas y exponenciales"

Actividad 7. Solución grafica de ecuaciones logarítmicas y exponenciales

Objetivo

1. Resolver gráficamente ecuaciones logarítmicas y exponenciales
2. Verificar la solución de las ecuaciones logarítmicas y exponenciales.

Instrucciones

1. En equipo realicen una discusión de la lectura 7.
2. En equipo resuelvan las actividades propuestas en winplot el ejercicio 7 y discute la relación de la solución grafica con la solución analítica (actividad 6) de las ecuaciones logarítmicas y exponenciales.
3. El director promueve la participación de los integrantes. El secretario recopila las aportaciones preparan una presentación de la traducción entre las representaciones analíticas, gráficas y verbales de la función exponencial y sus propiedades.
4. Entregan al profesor en un disket el trabajo de cada equipo.
5. Unos equipos hacen presentación de sus trabajos a todo el grupo.
6. Hacer comentarios y preguntas sobre la presentación.
7. Bajo la dirección del profesor evalúan los trabajos presentados.

Ejercicios 7

Resuelve en winplot las siguientes ecuaciones.

a). $4^{x^2-11x+30}=16$ **b)** $3^{x+2}+3^{x+1}+3^{x}+3^{x-1}=120$ **c).** $9^{x}-2*3^{x}-3=0$

d). $\log(x^2+2x)=\log 3$ **d).** $\log(x+6)=1+\log(x+3)$ **e).** $\log(3-x^2)=\log 2+\log x$

Criterios de evaluación

Para evaluar los ejercicios se asigna un puntaje de acuerdo al siguiente criterio

Nivel	**Mal**	**regular**	**Bien**	**Excelente**
Puntaje	0	1	2	3
criterio	Incorrecto	Contiene errores	incompleto	Completo

FORMULARIO

Exponentes

Resuelve la multiplicación $a^2 * a^3$. Al simplificar $(a\cdot a)(a\cdot a\cdot a)=a^8$, también se puede resolver por la ley del producto para exponentes.

Si *m* y *n* son números naturales y *b* es cualquier número real, entonces

$b^m * b^n = b^{m+n}$ …………………………………………………………….. **(Ley 1)**

Resuelve la división $\frac{a^4}{a^2}=\frac{\overset{\boxed{1}}{\cancel{a}}\cdot a\cdot a\cdot \overset{\boxed{1}}{\cancel{a}}}{\cancel{a}\cdot\cancel{a}}=a^2$ también se puede resolver por la ley de la división que dice:

Si *b* es cualquier número distinto de cero y *m*, *n* son enteros diferentes de cero entonces $\frac{b^m}{b^n}=b^{m-n}$ …………………………………………………**(Ley 2)**

Resuelve $\frac{a}{a^3}=\frac{a}{a.a.a}=\frac{1}{a^2}$ por **ley 2** $\frac{a}{a^3}=a^{3-1}=a^{-2}$ entonces $\frac{1}{a^2}=a^{-2}$.

Para cualquier real, *b* diferente de cero y cualquier número entero no negativo,

$b^{-m}=\frac{1}{b^m}$……………………………………………………………………… **(Ley 3)**

Resuelve $\frac{a^3}{a^3}=\frac{a.a.a}{a.a.a}=1$ por **ley 2** $\frac{a^3}{a^3}=a^{3-3}=a^0$ entonces 1= y^0 .

Si *b* es cualquier número real distinto de cero entonces $b^0=1$ ……... **(Ley 4)**

Resuelve $(a^3)^2$ simplificando $a^3\cdot a^3=a^6$ también se puede resolver por la ley de la potencia que dice:

Si *b* es un número real y *m* y *n* son enteros entonces $(b^m)^n=b^{m*n}$ … **(ley 5)**.

Resuelve $(cd)^2$ simplificando $(cd)(cd)=c^2d^2$ también se puede resolver por la ley de elevar un producto a una potencia dice:

Si *a* y *b* son números reales y *m* es un entero entonces $(ab)^m=a^mb^n$ …. **(Ley 6)**

Resuelve $\left(\frac{c}{d}\right)^2$ simplificando $\left(\frac{c}{d}\right)\left(\frac{c}{d}\right)=\frac{c^2}{d^2}$ también se puede resolver por la le de elevar un cociente a una potencia que dice:

Si a y b son números reales y m es un entero entonces $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$ ……. **(Ley 7)**

$\sqrt[n]{b}=b^{\frac{1}{n}}$ **………………………………………………………….. (Ley 8).**

Logaritmos

Toda ecuación de la forma e $y = f(x) = \log_b x$ **, define una función logarítmica. La relación que existe con las potencias acarrea una serie de consecuencias:**

1ª el logaritmo en cualquier base de 1 es 0**,** ya que**:**

$$\log_b 1 = 0 \Leftrightarrow b^0 = 1$$

2ª el logaritmo de la base, siempre es la unidad:

$$\log_b b = 1 \Leftrightarrow b^1 = b$$

3ª la base del logaritmo será un número positivo y diferente de la unidad:

$$\mathbf{b > 0 \ y \ b} \neq 1$$

4ª solamente se pueden calcular los logaritmos de números positivos, pues cualquiera que sea el exponente de una potencia el resultado de ella siempre es un número mayor que cero

$$x > 0$$

Propiedades de los logaritmos:

$$\log_b (u * v) = \log_b u + \log_b v$$

$$\log_b \left(\frac{u}{v}\right) = \log_b u - \log_b v$$

$$\log_b u^n = n * \log_b u$$

$$\log_b \sqrt[n]{u} = \frac{1}{n} * \log_b u$$

Los logaritmos que más se suelen utilizar son:

- Cuando la base b = 10, es lo que se llama logaritmo decimal. Cuando al escribir un logaritmo no aparezca la base, se tratará de un logaritmo decimal.

Cuando la base b = e = 2,718281... , entonces tendremos lo que se denomina un logaritmo neperiano, y que lo representaremos por ln.

Apéndice D

LECTURA 1

HISTORIA DE LAS FUNCIONES LOGARÍTMICA Y EXPONENCIAL Y SUS APLICACIONES EN CIENCIAS

Una multitud de fenómenos naturales son regidos por un corto número de funciones especiales, por ejemplo en la geología la magnitud de un terremoto, en la astronomía la magnitud de una estrella o planeta, en la física el cálculo de volúmenes etc. Están dados en función de una ecuación logarítmica. El crecimiento poblacional, en la medicina, la química y física entre otras siguen leyes exponenciales y se emplean las funciones exponenciales.

Para comprender mejor estas funciones hemos de remontarnos un poco al pasado.

En el siglo diecisiete, dos fueron las necesidades (relacionadas al movimiento) por lo que nace el concepto de función:

4. **El estudio del movimiento, influidos por los descubrimientos de Kepler y Galileo en relación con los cuerpos celestes.**

Los navegantes Europeos en su búsqueda de materias primas y de nuevas relaciones comerciales, se alejaban cada vez más de las costas de las que partían y esto les ocasionaba grandes dificultades para conocer su posición en alta mar y llegar al lugar deseado.

Necesitaban saber la latitud y la longitud. La primera se conseguía por observación directa del Sol o de las estrellas, pero la segunda ofrecía serias dificultades porque no disponían de los medios adecuados para medir correctamente la dirección del movimiento de la Luna, y cometían numerosos errores.

5. **El interés económico y militar.**

Las trayectorias de los proyectiles, sus alcances y alturas, el efecto de la velocidad de la boca del arma eran asuntos de sumo interés para los gobernantes.

Del estudio de diversos problemas del movimiento se extrajo la conclusión de que era necesario medir el tiempo con mayor precisión, y se llegó a vincular este problema con el movimiento del péndulo, mecanismo básico para la medida del tiempo.

La carencia de instrumentos de medida suficientemente precisos para construir tablas de variables impidió que el estudio de este concepto se abordara antes.

Por ejemplo:

Los griegos, que en otros aspectos tenían un desarrollo matemático admirable, no llegaron a tener una idea del movimiento lo suficientemente elaborada.

De los anteriores estudios, obtuvieron los matemáticos un concepto fundamental, que fue central en casi todo el trabajo de los dos siglos siguientes: *el concepto de función* o de *relación entre variables*.

El concepto de función aparece explícitamente en Leibniz (1692), y es utilizado por los de Bernoulli desde 1694. Euler (1707-1783) introdujo en 1734 el símbolo *f(x)*. En (1854) el concepto general de función queda establecido por Dirichlet como correspondencia arbitraria entre dos variables.

Algunas aplicaciones

1. Las bacterias normalmente se reproducen de la siguiente manera, una célula madre se divide en dos células hijas. Si sembramos una cantidad determinada de la bacteria, observamos que se necesita aproximadamente una hora para que se duplique.

1. Si comenzamos con una célula (a cero horas) ¿Cuántas células hijas habrán al cabo de 1,2, 3, 4,… horas?

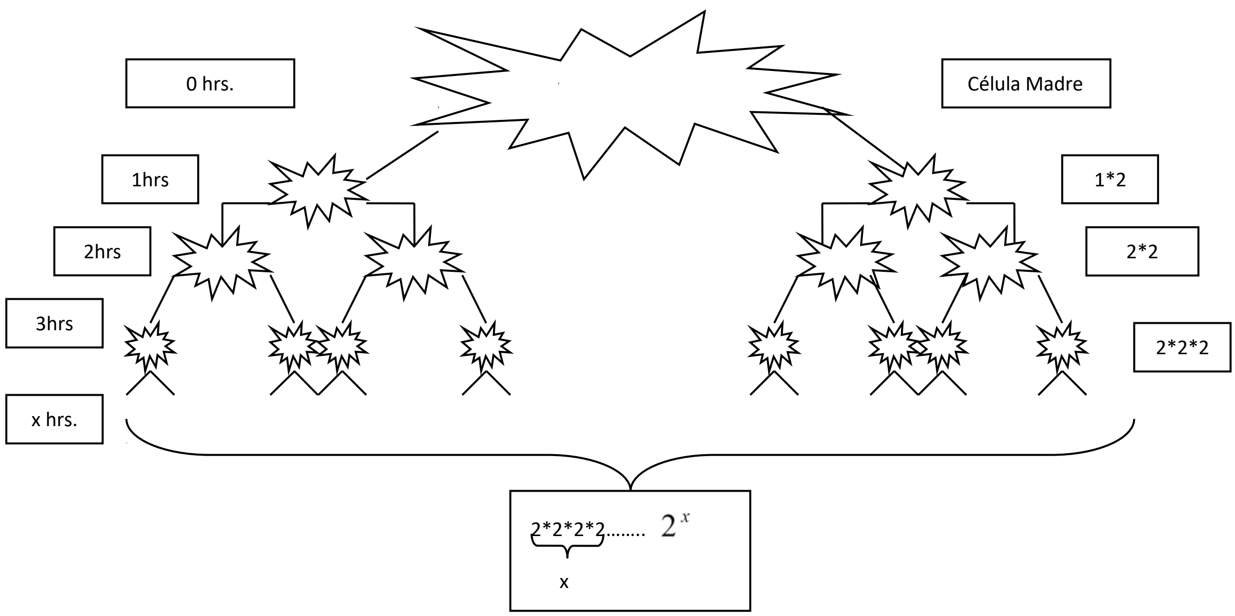
Como la célula madre se divide en dos células hijas al final de la primera hora, entonces en la segunda hora cada célula hija se dividirán en dos nuevas células hijas. Por lo tanto después de dos horas serán 4 células.

En la tercera hora cada célula nueva se divide en dos células hijas, es decir, 4 por 2, serán 8 células.

Análogamente se puede obtener para la cuarta hora, si tenemos 8 células en la tercera hora, nos quedarais de la siguiente manera 8 por 2. 16 células en la cuarta hora.

Siguiendo este patrón en la quita hora tendríamos 16 por 2, 32 células

Observa el siguiente diagrama:



Del algebra, la multiplicación de dos o más factores iguales como, $2*2*2, 2*2, 1*2, 1,$ se escriben en forma abreviada como $2^4, 2^3, 2^2, 2^1, 2^0$ respectivamente. El exponente indica el número de veces que la base *a* se toma como factor. Si el número de veces es *x* el producto será igual a $f(x) = a^x$

Completa la tabla con los datos obtenidos:

Tiempo (horas)	0	1	2	3	4	...	X
Número células	1 $2^0 = 1$	2 $2^1 = 2$	4 $2^2 = 4$	8 $2^3 = 8$	16 $2^4 = 16$	...	2^x

Observa que el tercer renglón de la tabla es resultado de la relación entre el tiempo que es la variable *x* con el número de células *f(x).*

2. Representa la función en forma analítica y gráficamente

Si ubicamos en el eje coordenado los datos de la tabla obtenemos los siguientes puntos, (0,1), (1,2), (2,4), (3,8), (4,16)…

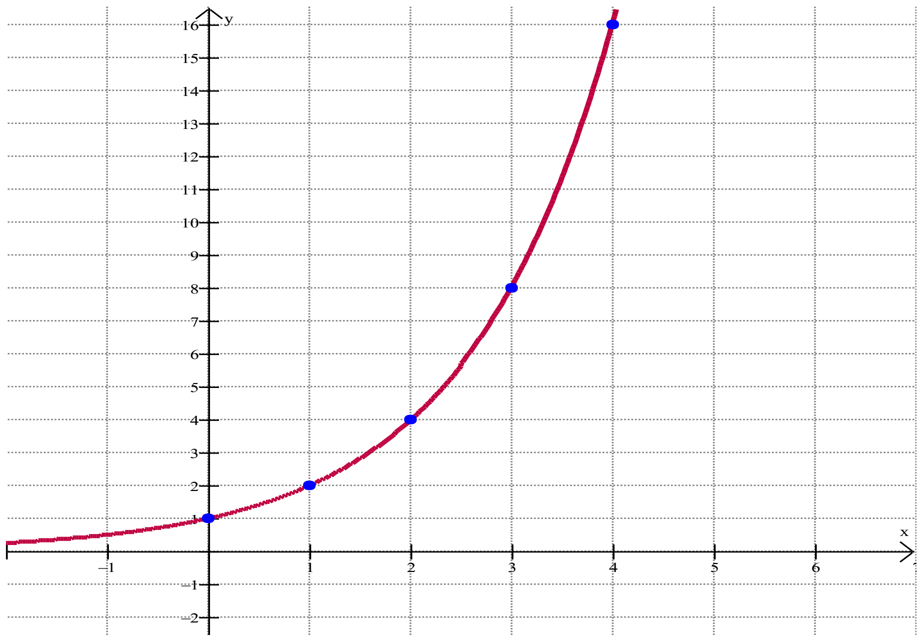


Figura 1. Gráfica de la función $f(x) = 2^x$

1. En Estados Unidos de América las ventas de automóviles deportivos han ido aumentando desde 1992. El número de ventas de cada año $f(t)$, en millones puede calcularse mediante la función $f(t) = 0.98 + 1.97\log(t+1)$ donde $t = 0$ representa a 1992, $t = 1$ representa a 1993 y así sucesivamente si esta tendencia continúa:

6. calcule el número de automóviles deportivos vendidos hasta 1998

año	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
t	0	1	2	3	4	5	6
$f(t)$	.98	1.57302	1.91992	2.16605	2.35697	2.51295	2.64484

7. representa en la forma gráfica

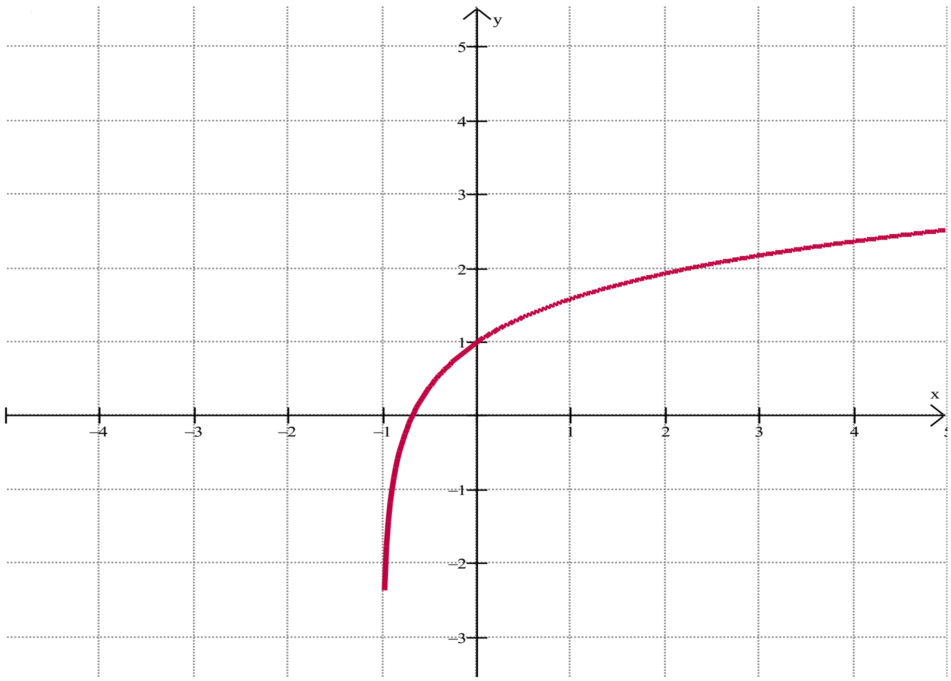


Figura2. Gráfica de la función $f(t)=0.98+1.97\log(t+1)$

LECTURA 2

FUNCIÓN EXPONENCIAL Y SUS PROPIEDADES (ENFOQUES ANALÍTICO, VERBAL Y GRÁFICO)

En la lectura uno hablamos de la historia y aplicación de las funciones exponencial y logarítmica. Vimos en el ejercicio uno como obteníamos una formula a partir de relacionar variables en un problema, esta fórmula se llama función exponencial.

Definición.

La función exponencial presenta una relación entre las variables x, y mediante expresiones del tipo $y = b^x$ o $f(x) = b^x$.

¿Qué pasaría con la función si b = 1 para cualquier valor de x?

¿Qué pasaría si tomara cualquier valor negativo cuándo $x = \frac{1}{2}$*?*

Si sustituimos el valor de b = 1 en la función, nos quedaría $y = 1^2$*, esta no es una función exponencial es una función constate (recta horizontal). Para la segunda pregunta si sustituimos en la función b = -4 y* $x = \frac{1}{2}$ *nos quedaría* $y = (-4)^{1/2}$ *(por la ley 8 del formulario)* $y = \sqrt{-4}$ *sabes del aritmética que no existe raíces negativas en los números reales.*

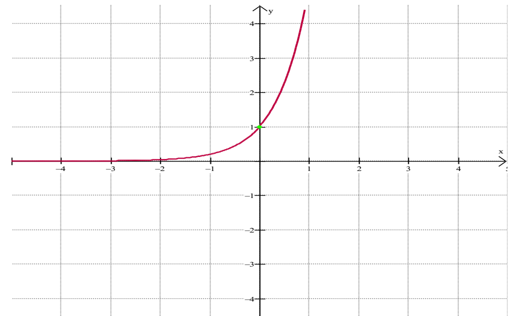
Por lo tanto a esta definición se agrega que el número b será un número real positivo y distinto de la unidad.

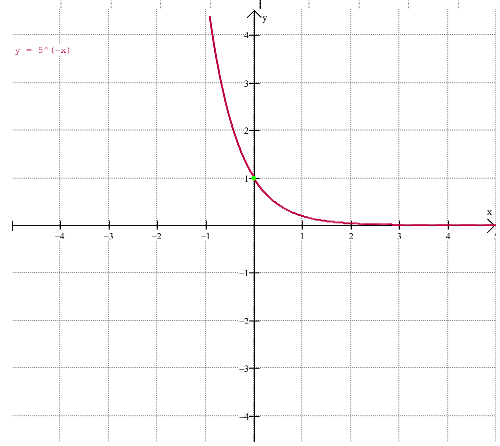
Propiedades

El Dominio (valores que toma *x*), Rango (valore que toma *y*), Carácter de crecimiento (sube o baja la curva) e Intersección con lo eje *y* (corte de la gráfica en el eje horizontal), son algunas de las propiedades o características comunes de las funciones exponenciales.

Observa las siguientes gráficas, y lee detenidamente

A la derecha en la parte de arriba vemos la función $y = 5^x$, y abajo la función $y = 5^{-x}$ (para resolver este tipo de funciones aplicamos ley 3 del formulario), notemos lo siguiente:
Las funciones están definidas para todo los números reales de *x*, es decir al introducir cualquier numero las función arrojan otro número real.
Por lo tanto el domino de las funciones son el conjunto de los números reales.
Para todo valor de *x* las funciones toman valores positivos, esto es las funciones $y = 5^x$, $y = 5^{-x}$ nunca podrán representar un número negativo, ni igual a cero.
El rango de las funciones son todos los números positivos reales.
La función $y = 5^x$ es creciente por que a medida que el valor de *x* aumenta, aumenta el de *y*. En cambio la función $y = 5^{-x}$ es decreciente por que el valor disminuye cuando el valor de x aumenta
Las dos curvas cortan al eje *y* en el punto (0,1)





En los siguientes puntos resumimos éstas propiedades para $y = f(x) = b^x$ **.**

4. Dominio es un conjunto de todos los números reales
5. Rango es el conjunto de todos los números positivos
6. La función es creciente cuando *b>1*, y es decreciente cuando *0<b<1*
7. Independiente de la base, la función exponencial $y = b^x$ pasa siempre por el punto (0,1), debido a que cuando *x* vale cero, por la ley 4 del formulario, *y = 1*.

Combinación de funciones

Así como los números pueden ser combinados de diferentes manera (suma, diferencia, producto etc.), las funciones también pueden ser combinadas para formar nuevas funciones, a esto se le llama comúnmente álgebra de funciones o combinación de funciones.

Sean *f* y *g* dos funciones, definimos:

Suma: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
Diferencia: $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
Producto: $(f*g)(x) = f(x)*g(x)$

Cociente: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Cada dominio de *(f+g)*, *(f-g)*, *(f*g)*, es la intersección del dominio de *f* con el dominio de *g*. El dominio $\left(\frac{f}{g}\right)$ es la intersección del dominio de *f* con el dominio de *g*, sin los números para los cuales *g(x)* = 0. Recuerda que la división entre cero no es válida.

Considera las funciones *h(x)*= 2^x y *m(x)*= 3^x la suma, diferencia, producto y cociente están dados por:

La suma $(h+m)(x) = 2^x + 3^x$

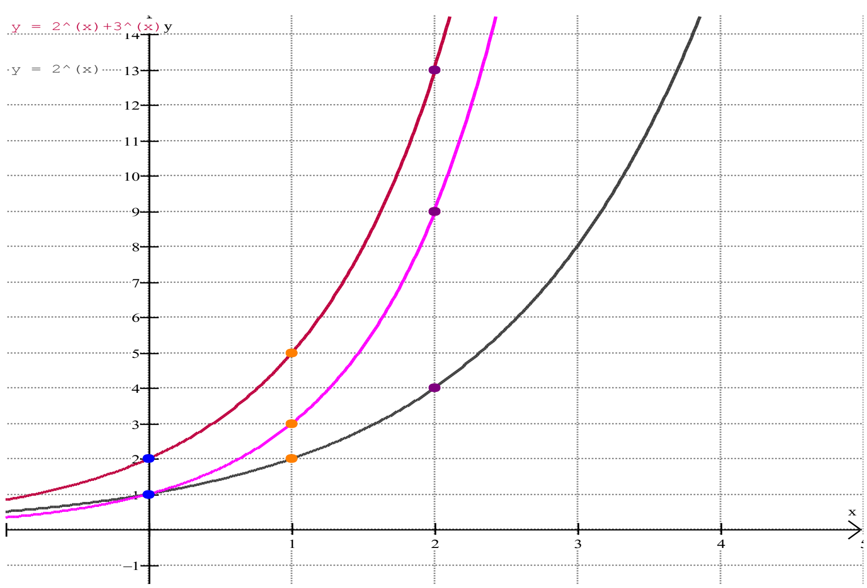
La diferencia $(h-m)(x) = 2^x - 3^x$

El producto $(h*m)(x) = 2^x * 3^x$

El cociente $\left(\frac{h}{m}\right)(x) = \frac{2^x}{3^x}$

Ejemplo1. Obtener la gráfica de la función suma es un proceso que se lleva a cabo a través de sumar alturas (ordenadas). Es decir el valor de $h(x_1)$ más el valor $m(x_1)$ dará el valor de
$(h+m)(x_1)$.

Observa la gráfica de abajo. Las curvas de $h(x) = 2^x$, $h(x) = 3^x$ y la suma $(h+m)(x) = 2^x + 3^x$ son de color gris, verde y rojo respectivamente.



Si sumamos las ordenadas (valores de *y*), en *x* = 0 de la curva, gris y verde, nos da como resultado la ordenada de la curva roja (que es la curva de la suma) esto es $y_1(0)+y_2(0)=1+1=2$ ordenada de curva roja cuando *x* = 0.

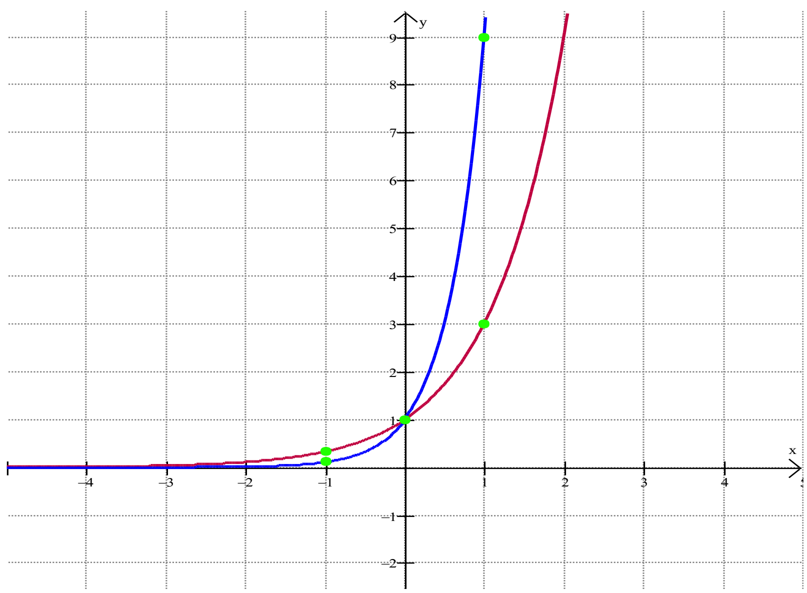
Si sumamos las ordenadas (valores de *y*), en *x* = 1 de la curva, gris y verde $y_1(1)+y_2(1)=2+3=5$ordenada de la curva roja.

Si sumamos las ordenadas (valores de *y*), en *x* = 2 de la curva, gris y verde $y_1(2)+y_2(2)=4+9=13$ ordenada de la curva roja y así sucesivamente.

De igual forma con las operaciones diferencia, multiplicación y división, la gráfica se obtiene haciendo la operación correspondiente con alturas (ordenadas), tendrás que tener cuidado con la división cuando el denominador sea cero.

Ejemplo 2. Observa las siguientes curvas

a) Determina en forma verbal y la forma analítica



Forma verbal

Tienen la forma de funciones exponenciales. En el primer cuadrante la curva de color azul está por arriba (crece más rápido) que la curva color rojo esto significa que la función de la curva color azul tiene una base mayor que la curva roja sin embargo en el segundo cuadrante la curva roja está por arriba que la curva azul, esto se debe a que en los números negativos las funciones exponenciales, por la ley tres de exponentes (ver formulario), se hacen números fraccionarios y la función que tiene mayor base en los negativos se convierte en la de menor base.

Forma analítica

Si observamos los puntos de la curva roja; (-1, $\frac{1}{3}$), (0,1), (1,3); (2,9), el punto que seguiría seria (3,27)........ $(x,3^x)$ por lo tanto la función en forma analítica de la curva color roja $y = 3^x$.

En el caso de la curva azul, (-1, $\frac{1}{9}$), (0,1), (1,9); (2,81)........ $(x,9^x)$ por lo tanto la función en forma analítica de la curva color azul $g = 9^x$.

1. Multiplica geométricamente la función $y = 3^x$ por si misma apóyate con la gráfica del inciso *a)*.

$(y * y)(x) = 3^x * 3^x$ Si multiplicas las ordenadas por si mismas de la curva color roja, nos dara como resultado las ordenadas de la curva azul, si utilizamos las leyes de los exponentes obtenemos $m = 3^{2x} = (3^2)^x = 9^x$

El dominio de ambas funciones son todos los reales, el rango son todos los números positivos, cortan al eje y en (0,1) y son crecientes.

Ejemplo 2

Determina en forma analítica y gráfica, tres funciones con las siguientes condiciones:

$$y_1(-1) * y_2(-1/) = \frac{1}{3} * \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$y_1(0) * y_2(0) \quad = \quad 1 * \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$y_1(1) * y_2(1) \quad = \quad 3 * \frac{1}{3} = 1$$

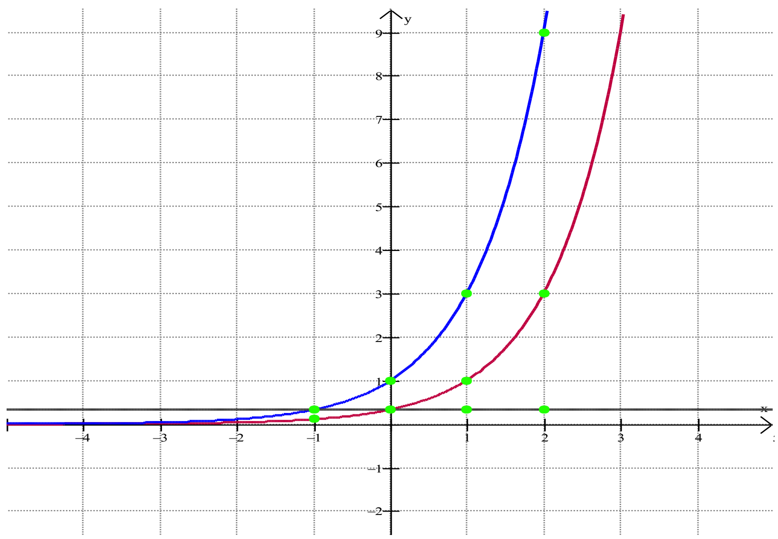
$$y_1(2) * y_2(2) \quad = \quad 9 * \frac{1}{3} = 3$$

De las cuales una de las funciones es constante, las otras dos restantes en el segundo y primer cuadrante tienen la misma posición es decir, en todo el recorrido una de ellas queda arriba de la otra, mientras que la función constante en el segundo cuadrante está por arriba de las otras dos y en el primer cuadrante está por debajo.

Forma analítica

Si observamos las multiplicación de funciones la primera función para valores de *x* = -1, 0, 1, 2, tenemos los valores $\frac{1}{3}, 1, 3, 9,$ siguiendo la secuencia seguiría 27, 81 o sea *y* $= 3^x$, si seguimos con la segunda función para los mismos valores de x tendremos $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3},$ o sea $z = \frac{1}{3}$ (función constante). La tercera función, la podemos resolver de la misma manera o por la combinación de funciones esto es $k = 3^x * \frac{1}{3},$ utilizando las leyes de los exponentes tenemos k = $3^x * 3^{-1}$ = 3^{x-1}

Forma gráfica



LECTURA 3

TRADUCCIÓN ENTRE LAS REPRESENTACIONES ANALÍTICAS, GRÁFICAS Y VERBAL DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL Y SUS PROPIEDADES

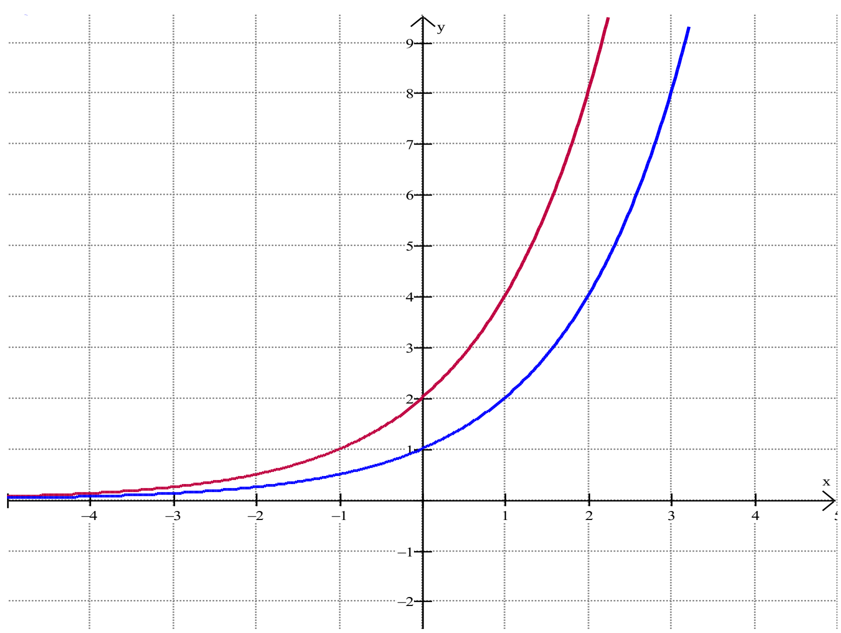
En la lectura 2 establecimos la definición de la función exponencial, sus propiedades y algunas combinaciones de esta, vimos tres representaciones de la función; en forma analítica, verbal y gráfica, en esta lectura resolveremos ejercicios de análisis es decir la traducción entre dichas representaciones.

Ejemplos

4. Si $y = 3^{ax}$, *y* (0) = 1, *y* (1) = 1/3, *y* (2) = 1/9, *y* (3) = 1/27, ¿cuánto vale a?

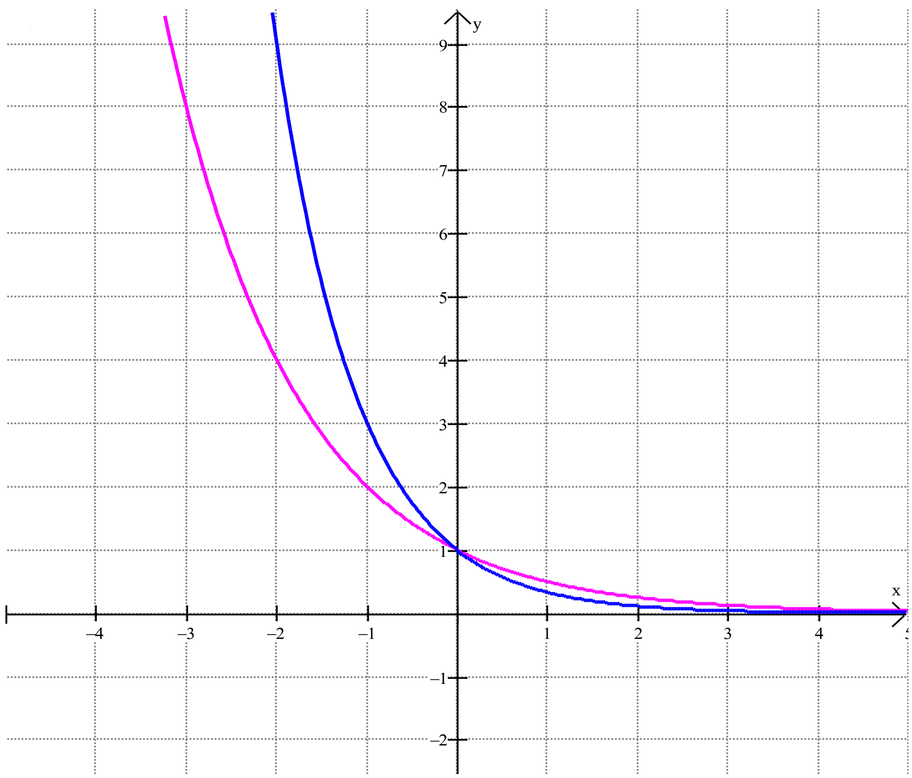
Los puntos son (0,1) $\left(1, \frac{1}{3}\right)$ $\left(2, \frac{1}{9}\right)$ $\left(3, \frac{1}{27}\right)$ estos puntos también los podemos representar como $\left(0, \frac{1}{3^0}\right)$ $\left(1, \frac{1}{3^1}\right)$ $\left(2, \frac{1}{3^2}\right)$ $\left(3, \frac{1}{3^3}\right)$.............$\left(x, \frac{1}{3^x}\right)$ por las leyes de los exponentes $\left(\frac{1}{3^x}\right) = 3^{-x}$ por lo tanto *a* = -1

5. Gráfica y relaciona las siguientes funciones $y = 2^x, m = 2^{x+1}$



Por las leyes de los exponentes la función $m=2^{x+1}$ se puede descomponer en $m=2^x*2^1$ la relación que guarda con $y=2^x$ es la multiplicación de la constante 2, si observas la gráfica de $y=2^x$ (color azul), y multiplicas las ordenadas por dos te dará una serie de punto que forman la curva $m=2^{x+1}$ (color roja)

6. dadas las curvas ¿Cuál de ella tiene una base más pequeña?



La curva azul es la que tiene menor base. Para valores positivos de *x* esta función se hace más pequeña que la rosa en los valores negativos de *x* pasa lo contrario pero esta situación de da por que las funciones son de base fraccionaria (si observas su forma) y se invierte por lo tanto en los negativos de *x*, la función se hace entera.

LECTURA 4

FUNCIÓN LOGARITMICA Y SUS PROPIEDADES (ENFOQUES ANALÍTICO, VERBAL Y GRÁFICO).

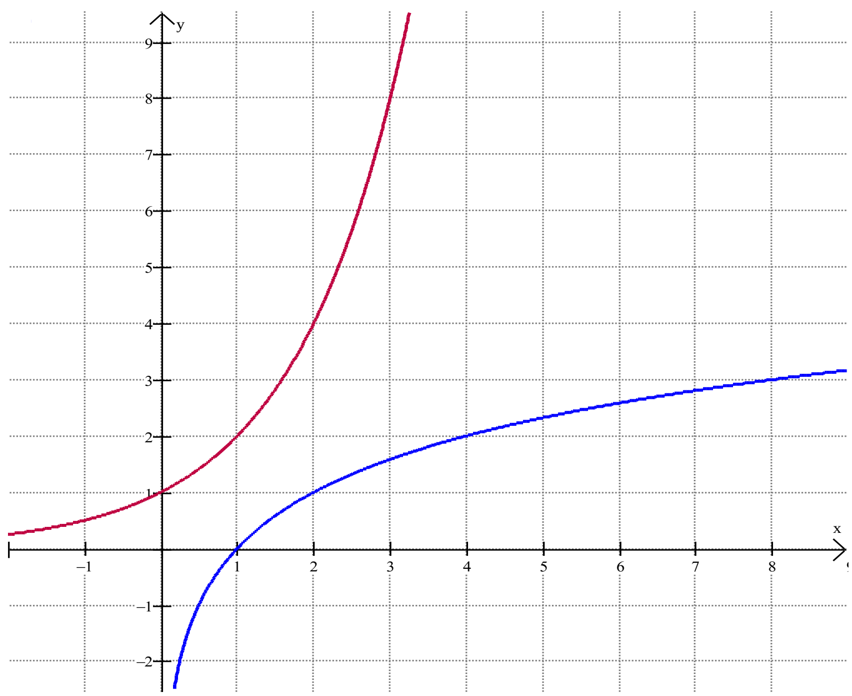
Sean $f(x) = 2^x$ y $g(x) = ?$

Si construimos las tablas y sus respectivas graficas de cada una (para determinar los valores en la tabla de *g(x)*, el dominio de *f(x)* será el rango de *g(x)*, y el rango de *f(x)* será el dominio de *f(x).*

x	-1	0	1	2	3
f(x)	1/2	1	2	4	8

Intercambiando los renglones

x	1/2	1	2	4	8
g(X)	-1	0	1	2	3



A una función tal como *g(x)* (curva verde) la llamaremos función logarítmica de base"2" asociada la función exponencial *f(x)* (curva roja) de la misma base. La función logaritmo es la función inversa de la exponencial, que existe en base a lo demostrado anteriormente.

Definición

La ecuación $y = \log_b x$ define una función logarítmica con base *b*. al igual que la función exponencial x es un numero positivo y diferente de cero. ($y = \log_b x$ equivale a $x = b^y$ por ser funciones inversas).

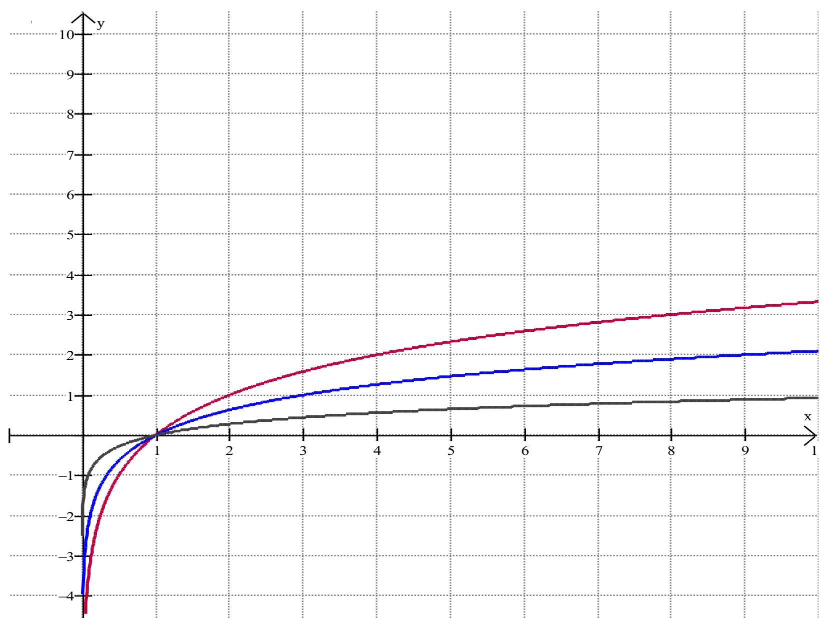
Si observamos la gráfica de *g(x)* (curva verde) y recordamos las propiedades de la función exponencial podremos determinar las propiedades de la función logarítmica.

Propiedades para $y = \log_b x$.

8. Dominio es el conjunto de todos los números positivos
9. Rango es un conjunto de todos los números reales
10. La función es creciente cuando *b>1*, y es decreciente cuando *0<b<1*
11. Independiente de la base, la función logarítmica $y = \log_b x$ pasa siempre por el punto (1,0).

Las funciones que se estudiaran serán las de base 10

Ejemplo 1. Sean las funciones $y = \log_2 x$ (color rojo), $y = \log_3 x$ (color azul), $y = \log_{12} x$ (color verde) determina las propiedades en forma gráfica, analítica y verbal.



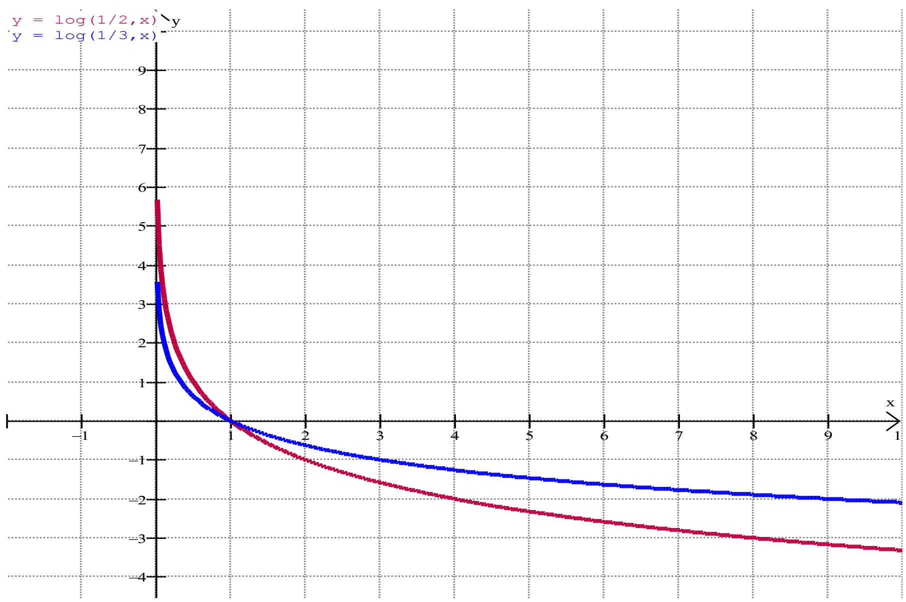
El Dominio de las funciones son los valores que toma *x*, y solamente toma valores positivos. $D = (0, \infty)$

El rango son los valores que puede tomar *y*, o sea el resultado de un logaritmo. $R = (-\infty, \infty)$.

Todas las funciones pasan por el punto (1,0), esto es, $\log_b 1 = 0 \Leftrightarrow b^0 = 1$

Las funciones son crecientes**.**
Las funciones son positiva (por arriba del eje *x*), para valores de *x* mayores que la unidad.
La función será negativa (por abajo del eje *y*), para valores de *x* menores que la unidad.

Ejemplo 2. Sean las funciones $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ (color rojo), $y=\log_{\frac{1}{3}} x$ (color azul) , determina las propiedades en forma gráfica, analítica y verbal.



El dominio de las funciones es cualquier valor positivo. $D=(0,\infty)$.
El rango son todos los valores reales. $D=(0,\infty)$.
Todas las funciones pasan por el punto (1,0).
Las funciones son decrecientes.
La funciones son positivas para valores de *x* comprendidos entre 0 y1, las funciones son Negativas para valores de *x* mayores de 1.

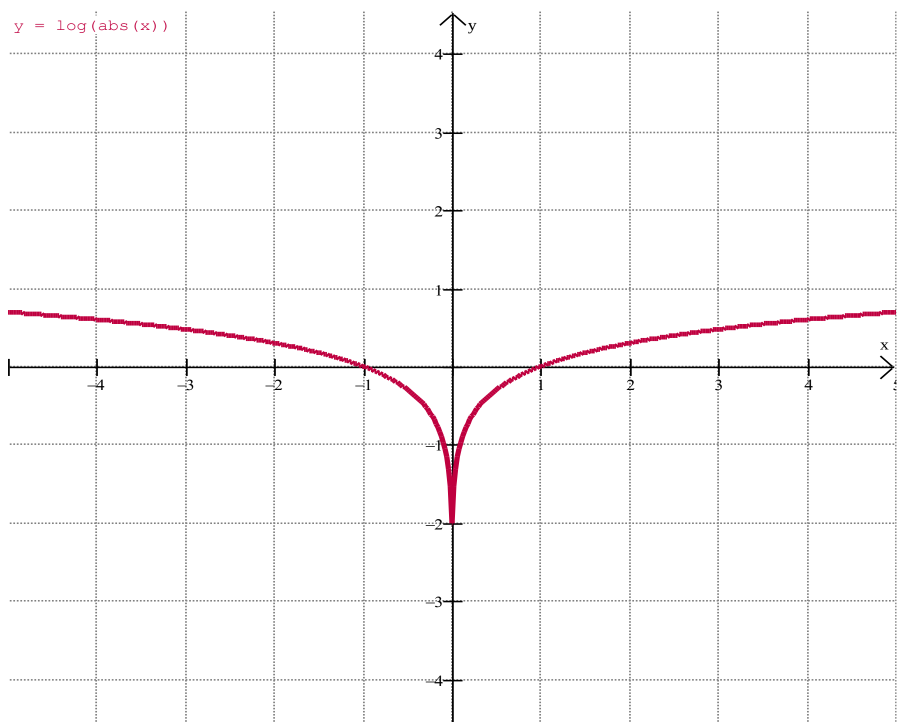
LECTURA 5

TRADUCCIÓN ENTRE LAS REPRESENTACIONES ANALÍTICA, GRÁFICA Y VERBAL DE LA FUNCIÓN LOGARITMICA Y SUS PROPIEDADES.

En la lectura 4 establecimos la definición de la función logarítmica, y sus propiedades, vimos tres representaciones de la función; en forma analítica, verbal y gráfica, en esta lectura resolveremos ejercicios de análisis, es decir la traducción entre dichas representaciones.

Ejemplo 1 determina el dominio de la función $y = \log_{10} |x|$, comprueba graficando.

Por la definición de función logaritmo vista en la lectura 4, dice la ecuación $y = \log_b x$ define una función logarítmica con base *b*. donde *x* es un numero positivo y diferente de cero. En este caso si *x* toma valores negativos por el valor absoluto se transforma en valores positivos, por lo tanto el dominio son todos los números reales menos el cero.



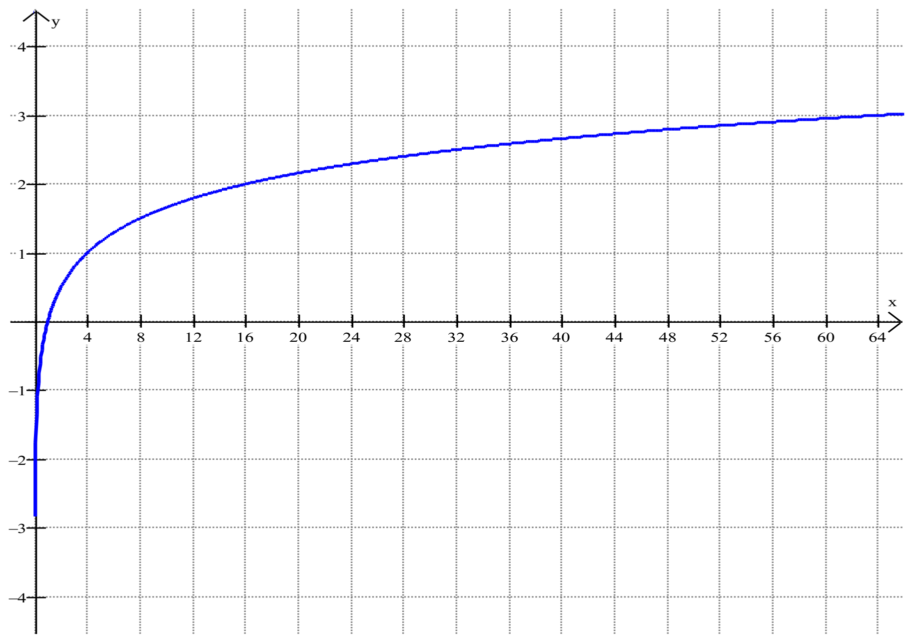
Ejemplo 2

La gráfica de una función logarítmica pasa por el punto (243, 5). ¿Determina la base de la función?

Tomando el punto (243, 5), la ordenada la podemos representar 3^5, el punto quedaría (3^5, 5) si este punto lo expresamos como (3^5, *x*), si lo representamos en forma exponencial 3^5 = x pasando a la forma logarítmica $y = \log_3 x$.

Ejemplo 3

Observa la gráfica.



Determina en forma analítica la ecuación de la función.

Si determinamos algunos puntos de la gráfica (4,1), (16,2), (64,3), estos punto pasando la forma exponencial $(4^1,1),(4^2,2),(4^3,3)$ continuarían los puntos $(4^4,4),(4^5,5)$ si recordamos las propiedades de las funciones logarítmicas (lectura 4) que dice el domino de la función logaritmo es el rango de la exponencial y el rango de la función logarítmica es el dominio de la exponencial por tanto si cambiamos en lo puntos la ordenas por las abscisas tendremos $(1,4^1),(2,4^2),(3,4^3),(4,4^4),(5,4^5)$ estos puntos pertenecen a la función exponencial $y = 4^x$. Si utilizamos la definición de la función logarítmica la función analítica pedida es $y = \log_4 x$

LECTURA 6

SOLUCIÓN ANALÍTICA DE ECUACIONES LOGARÍTMICAS Y EXPONENCIALES

Ecuaciones exponenciales.

Cuando nos enfrentamos a ecuaciones, donde la incógnita aparece en el exponente de una potencia, tendremos una ecuación exponencial.
Para resolverlas tendremos varias herramientas, todas ellas basadas en las leyes de los exponentes, además de estas leyes se aplica la relación:

Si $b^{x_1} = b^{x_2}$ entonces $x_1 = x_2$ .... (1)

La relación nos dice que cuando tengamos dos cantidades con la misma base podemos igualar los exponentes

Ejemplos:

Resuelve analíticamente las siguientes ecuaciones

1. $2^x = 16$ por las leyes de los exponentes $2^x = 2^4$ utilizando (1), x = 4.

2. $\frac{1}{3^{x-1}} = 81$ utilizando leyes de los exponentes $\left(3^{x-1}\right)^{-1} = 81$ haciendo los dos lados de la misma base $\left(3^{x-1}\right)^{-1} = 3^4$ igualando exponentes $-x+1=4$; x = -3

3. $2^{x-1} + 2^x + 2^{2+1} = 7$
   En este tipo de ejercicios la estrategia es factorizar como termino común el numero dos (base), para ello utilizamos las leyes de los exponentes

   $2^x * 2^{-1} + 2^x + 2^x * 2^1 = 7$ factorizando por termino común $2^x(2^{-1} + 1 + 2) = 7$;

$$2^x\left(\frac{1}{2} + 1 + 2\right) = 7 \quad \Longrightarrow \quad 2^x\left(\frac{7}{2}\right) = 7 \quad \Longrightarrow \quad 2^x = 7\left(\frac{2}{7}\right)$$

$$2^x = 2 \Rightarrow x = 1$$

Puede ocurrir que al convertir una ecuación exponencial en algebraica, tengamos que realizar un cambio de variable, encontrándonos con una ecuación de 2º grado, que una vez solucionada nos lleve, deshaciendo el cambio de variable a la solución de la ecuación exponencial.

Ejemplo:

4. $4^x - 3*2^{x+1} + 8 = 0$ descomponiendo en ecuación de segundo grado

$$\left(2^2\right)^x - 3*2^x*2^1 + 8 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \left(2^2\right)^x - 6*2^x + 8 = 0$$

haciendo cambio de variable $2^x = t \quad \Longrightarrow \quad t^2 - 6*t + 8 = 0$

resolviendo la ecuación de segundo grado

$(t-4)(t-2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{matrix} (t-4) = 0; t = 4 \\ (t-2) = 0; t = 2 \end{matrix}$ Haciendo el cambio de variable

$$2^x = t$$
$$2^x = 4; \quad 2^x = 2^2 \quad x = 2$$
$$2^x = 2 \qquad\qquad x = 1$$

Un ejemplo especial:

5. $2^{x+2} = 9$ Ante la imposibilidad de expresar el 9 como potencia de base 2, la ecuación planteada no se podrá resolver a menos que trabajemos utilizando logaritmos.

Aplicando logaritmos a ambos lado de la ecuación $\log 2^{x+2} = \log 9$ por la propiedad del exponente en los logaritmos. $(x+2)\log 2 = \log 9$ despejando *x*

$x = \dfrac{\log 9}{\log 2} - 2$; $x = 1.16992500$

Ecuaciones logarítmicas.

Una ecuación logarítmica es aquella en la cual la incógnita se vea afectada por la operación logarítmica. La resolución de estas ecuaciones es la misma que para resolver ecuaciones exponenciales, esto es, convertir la ecuación logarítmica en algebraica, de manera que la búsqueda de la solución es casi inmediata.
Las herramientas utilizadas para ello serán las propiedades de los logaritmos, y la relación logarítmica:

$$\log x_1 = \log x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ .... (2)}$$

Una vez que obtengamos la ecuación algebraica que debemos resolver, tendremos que comprobar las soluciones obtenidas, para ver si son válidas dentro de la expresión logarítmica con la cual estamos trabajando, debido a que pueden aparecer soluciones extrañas, que no se podrán aceptar como solución de nuestra ecuación logarítmica.

La forma de resolverlas es la misma cualquiera que sea la base del logaritmo, por lo que en este tema vamos a simbolizar los logaritmos como **log**. Entendiendo que la base es diez, mientras no digamos lo contrario

Ejemplos:

Resuelve analíticamente las siguientes ecuaciones

1. $\log(x+6)=\log(2x-1)$ **aplicando la relación (2),** $x+6=2x-1$ resolviendo la ecuación algebraica x = 7

2. $3\log x-\log 32=\log\frac{x}{2}$ aplicando las propiedades de los logaritmos al primer miembro de la ecuación (potencia y resta) nos quedará:

   $\log x^3-\log 32=\log\frac{x}{2} \Rightarrow \log\frac{x^3}{32}=\log\frac{x}{2}$ aplicando la relación **(2)**

   $\frac{x^3}{32}=\frac{x}{2} \Rightarrow 2x^3-32x=0$ resolviendo la ecuacion cubica $2x(x^2-16)=0$

   2x = 0 ; $(x^2-16)=0$; x = 0 ; (x-4) (x+4) = 0; x = 4; x = - 4

De las tres soluciones de la ecuación algebraica, dos de las soluciones x = 0, x = -4 se consideran soluciones extrañas, no válidas para nuestra ecuación logarítmica de partida ya que al sustituir, x por cero y menos cuatro es imposible calcular los logaritmos de números negativos o cero, con lo que la única solución aceptada es x = 4

3. $2\log x=3+\log\frac{x}{10}$ aplicando propiedades de los logaritmos tendremos

   $\log x^2=\log 10^3+\log\frac{x}{10}$ (recuerda que $3=\log 10^3$)

   aplicando la propiedad de la multiplicación para los logaritmos en el segundo miembro de la ecuación.

   $\log x^2=\log 10^3*\log\frac{x}{10}$ utilizando la relación **(2)**

   $x^2=\frac{10^3 x}{10} \Rightarrow x^2=100x \Rightarrow x^2-100x=0$

   Resolviendo la ecuación de segundo grado

   $x(x-100)=0$; x = 0 y x = 100

   x = 0 solución extraña, x = 100 es la solución.

LECTURA 7

SOLUCIÓN GRAFICA DE ECUACIONES LOGARÍTMICAS Y EXPONENCIALES

Solución Grafica de ecuaciones exponenciales.

En cursos anteriores has resuelto de manera gráfica las ecuaciones de una variable. Las ecuaciones logarítmicas y exponenciales también pueden resolverse de forma gráfica; para hacerlo debes de encontrar un valor de “x” que cumpla la igualdad (es como en cualquier ecuación). En casos sencillos, eso se puede lograr por simple observación.

Tomaremos algunos ejemplos de la lectura ocho:

Resuelve geométricamente las ecuaciones exponenciales

4. $2^x = 16$ ***(ejemplo 1, lectura 6)***

Se descompone la ecuación en dos funciones y = 2^x; y = 16, en un mismo eje coordenado se introduce las funciones a winplot.

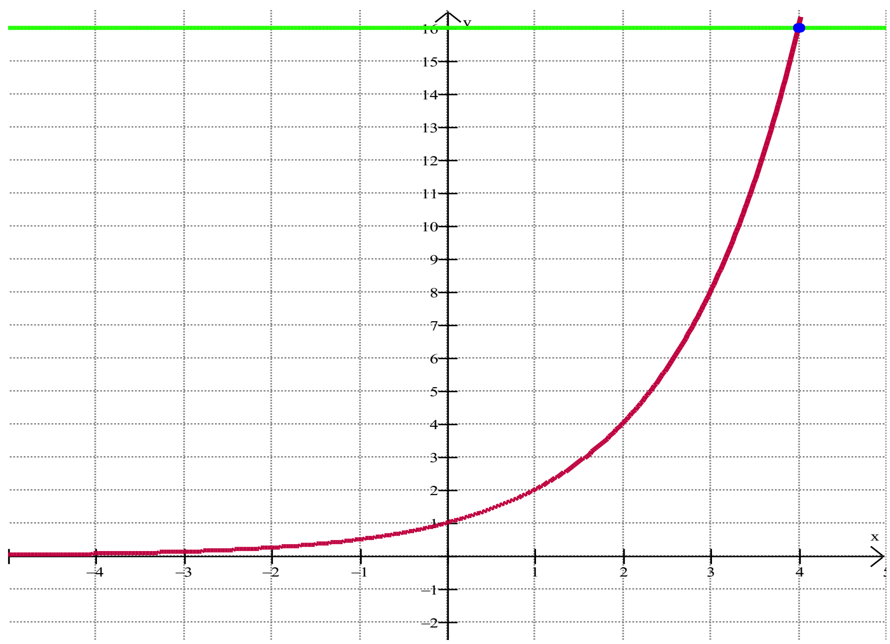


Figura 9.1. Solución grafica de la ecuación $2^x = 16$

La solución geométrica es la coordenada de x en el punto de intersección de las dos gráficas. x = 4

12. $4^x - 3*2^{x+1} + 8 = 0$ ***(ejemplo 4, lectura 6)***

Para esta ecuación las ecuaciones son $y = 4^x - 3*2^{x+1} + 8$; $y = 0$

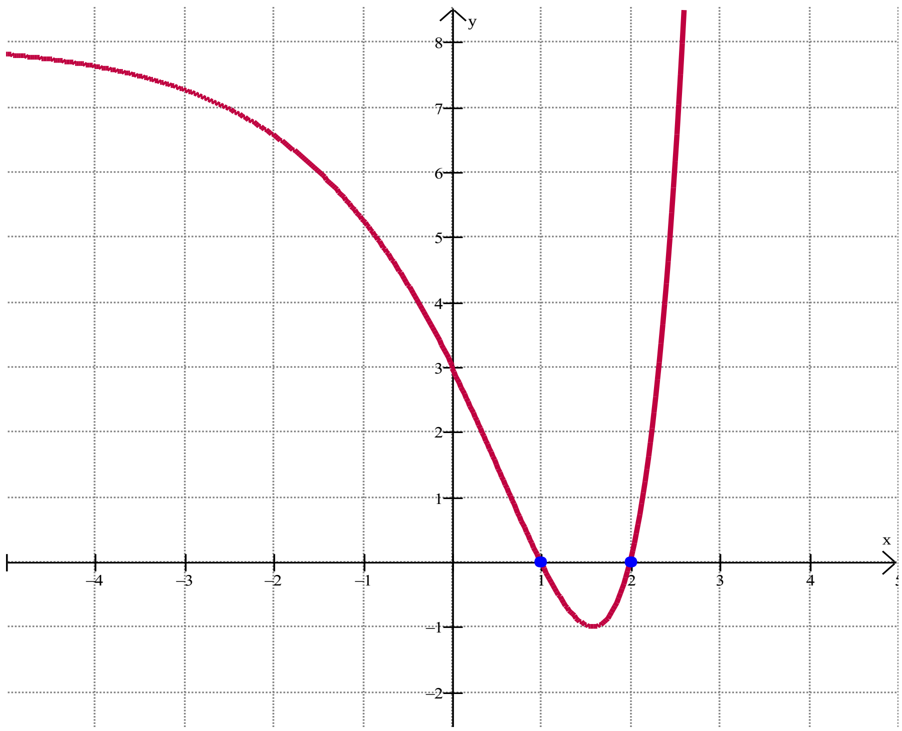


Figura 9.3. Solución grafica de la ecuación $y = 4^x - 3 * 2^{x+1} + 8$

Observa la curva corta al eje *x* en *x* = 1 y *x* = 2, esto pasa porque es una ecuación exponencial de segundo grado.

Graficas de ecuaciones logarítmicas.

Tomando algunos ejercicios de la lectura ocho

Resuelve geométricamente las ecuaciones logarítmicas

13. $\log(x+6) = \log(2x-1)$. ***(Ejemplo 6 lectura 6)***

Al igual que las ecuaciones exponenciales para resolver este tipo de ecuaciones se descompone la ecuación en dos funciones solo que una de ellas es la ecuación completa igualada a cero y despejada; $y = \log(x+6) - \log(2x-1)$ **la otra función es la ecuación algebraica que resulta de aplicar la** relación (2) **igualada a cero y despejada** $x + 6 = 2x - 1$; **la función nos queda como** $y = x + 6 - 2x + 1$; $y = -x + 7$.

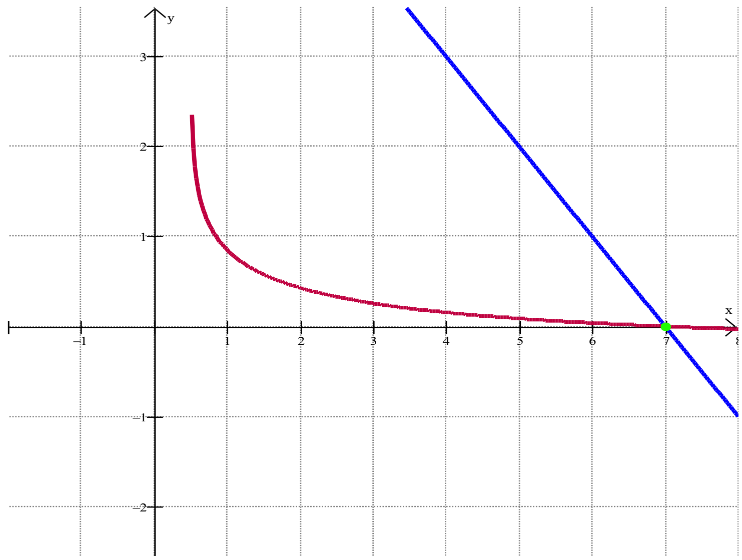


Figura 9.4. Solución grafica de la ecuación. $\log(x+6) = \log(2x-1)$

La solución geométrica es la coordenada de *x* en el punto corte e intersección de las dos gráficas. *x* = 7

Nota: Cuando igualarles a cero las ecuaciones debes de tener cuidado al despejar. La forma correcta es 0 =....primer miembro....

14. $3\log x - \log 32 = \log\frac{x}{2}$ ***(Ejemplo 7 lectura 6)***

La primera ecuación del problema es $y = 3\log x - \log 32 - \log\frac{x}{2}$ aplicando propiedades y relación (2), **la segunda ecuación es** $y = x^3 - 16x$

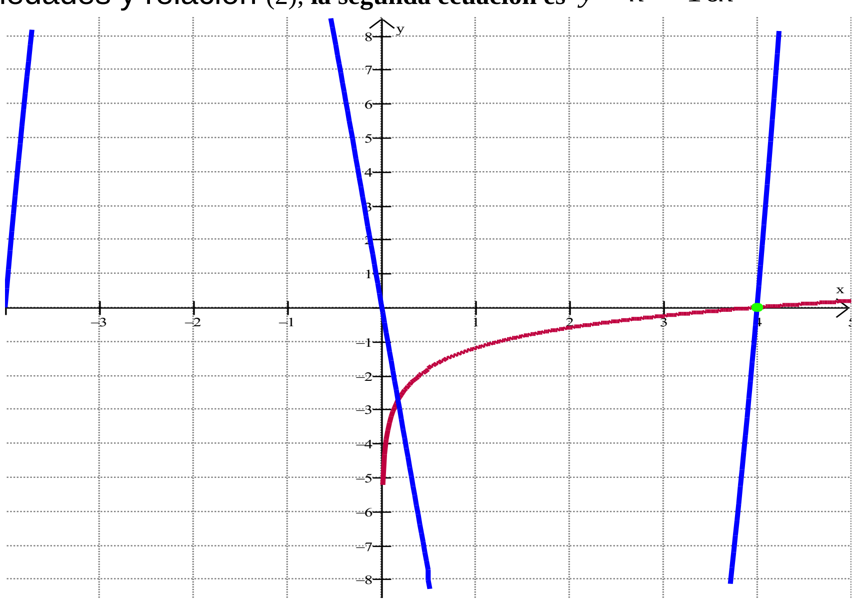


Figura 9.6 Solución grafica de la ecuación $3\log x - \log 32 = \log\frac{x}{2}$