Instrumentos de investigación

Instrumentos de Investigación

Editorial

Instrumentos de investigación, es una publicación editada por la Universidad Tecnocientífica del Pacifico S.C., calle 20 de Noviembre, 75, Col. Mololoa, C.P. 63050. Tel. (31)1212-5253, www.tecnocientífica.com. Marzo 2018. Primera Edición digital. Tiraje: 50 ejemplares.

ISBN:

978-607-9488-64-2

Instrumentos de investigación

Contenido

Introducción

Los instrumentos de investigación válidos y confiables es una herramienta indispensable para realizar cualquier estudio que sea representativo de una población. En este libro se presenta una recopilación de instrumentos de investigación para distintos ámbitos de las ciencias.

Encuesta para identificar las creencias y emociones en el aprendizaje matemático

Ana Luisa Estrada Esquivel
Marcial Heriberto Arroyo Avena
Rosalva Enciso Arámbula
Miguel Ángel López Santana
Cesar Humberto Arrollo Villa
Bertha Alicia Arvizu López

En este documento se presenta un cuestionario que se diseñó y validó para conocer las creencias y emociones hacia el aprendizaje de las matemáticas. Para su construcción se tomaron en cuenta dos de las tres categorías de la clasificación de De Corte y Op‘t Eynde (como se citó en Gómez, 2007), la cual está constituida por las siguientes categorías:1) creencias sobre la educación matemática; 2) creencias sobre sí mismos; y 3) creencias sobre el contexto se consideraron las últimas dos y la primera fue cambiada por creencia sobre el aprendizaje de las matemáticas; la segunda fue modificada agregando las emociones al aprender matemáticas. Del análisis de sub-categorías de McLeod (como se citó en Caballero, 2007), de Bustos (2012) y del propio De Corte y Op‘t Eynde (como se citó en Gómez, 2007) se construyeron sub-categorías para cada una de las tres categorías. Ellas fueron:1) creencias hacia el aprendizaje de las matemáticas, con dos subcategorías, su definición y su utilidad; 2) creencias sobre el contexto para aprender matemáticas, se diseñaron cuatro subcategorías: profesores, compañeros de clase, actividades de clase, y uso de tecnología; y 3) emociones positivas y negativas al aprender matemáticas.

Las preguntas del cuestionario para identificar emociones estuvieron compuestas por dos categorías definidas por Goleman (2007): 1) Emociones positivas; 2) emociones negativas. Este autor define a la familia de las emociones negativas en los siguientes términos. Las emociones negativas: Ira: rabia, enojo, furia, irritabilidad, odio; Tristeza: pena, pesimismo, desesperación; Miedo: temor, preocupación, inquietud, nerviosismo, angustia; Aversión: desprecio, antipatía, disgusto; y vergüenza: culpa, remordimiento, humillación. Las emociones positivas y su correspondiente familia son las siguientes: Alegría: felicidad, gozo, contento, diversión, satisfacción; y Confianza: aceptación, amabilidad, devoción. La definición de las variables, sus dimensiones e indicadores se presentan en la tabla 1. La operacionalización de la variable creencias en el aprendizaje de las matemáticas se presenta en la tabla 2 y la operacionalización de la variable emociones en el aprendizaje de las matemáticas es presentada en la tabla 3.

Tabla 1

Definición y clasificación de variables del estudio

Variables	Definición conceptual	Dimensión	Indicador
Independiene: Creencias	Son las ideas consideradas como verdaderas asociadas a la matemática que condiciona una reacción de aceptación o rechazo	Matemáticas	Naturaleza
			Utilidad
		Contexto de aprendizaje matemático	Profesores
			Compañeros
			Actividades
			Tecnología
Independiente: emociones	Reacción automática que nos lleva a actuar, cada emoción prepara una reacción, cada emoción es el resultado de innumerables desafíos	Positivas	Alegría
			Confianza
		Negativas	Ira
			Tristeza
			Miedo
			aversión
			Vergüenza
Dependiente: Aprendizaje matemático	Conocimiento adquirido a partir de la interacción de los conocimientos previos, y son observables a partir de su utilidad para resolver problemas y de la disposición que se tenga para aprender, es decir, la motivación, es determinante	Calificación de 80-100	Suficiente
		Calificación de 0-79	No suficiente

Nota: Adaptado de McLeod (1992, citado en Caballero, 2007; Gómez, 2007 y Bustos, 2012).

Tabla 2

Operacionalización de la variable creencias en el aprendizaje de las matemáticas

Variables	Dimensión	Indicador	Pregunta	Opción de respuesta
Creencias	Matemáticas	Naturaleza	Aprender matemáticas es fácil	Si / No
			Aprender matemáticas es	Abierta
		Utilidad	Las matemáticas son útiles	Si / No
			Aprender matemáticas es útil para:	Abierta
	Contexto de aprendizaje matemático	Profesores	Los profesores de matemáticas explican claro y detalladamente	Si / No
			Los profesores de matemáticas permiten hacer preguntas	Si / No
			Los profesores de matemáticas son	Abierta
		Compañeros	En las clases de matemáticas los estudiantes se divierten	Si / No
			Aprendo mejor matemáticas cuando trabajo en equipo	Si / No
			Mis compañeros creen que aprender matemáticas es	Abierta
		Actividades	Los libros de matemática son fáciles de leer	Si / No
			Las actividades de matemáticas son divertidas	Si / No
			Las actividades de matemáticas son	Abierta
		Tecnología	Con la tecnología se aprender matemáticas mejor	Si / No
			Aprender Matemáticas con tecnología es	Abierta

Nota: Adaptado de McLeod (1992, citado en Caballero, 2007; Gómez, 2007 y Bustos, 2012).

Tabla 3

Operacionalización de la variable emociones en el aprendizaje de las matemáticas

Variables	Dimensión	Indicador	Pregunta	Opción de Respuesta
Emociones	Positivas	Alegría	Aprender matemáticas me produce satisfacción.	Si / No
			En la clase de matemática, siento alegría cuando	Abierta
		Confianza	Cuando aprendo matemáticas, me siento orgullosa (o) de mí misma (o)	Si / No
			En la clase de matemáticas me siento confiada si	Abierta
	Negativas	Ira	Odio ir a la clase de matemáticas	Si / No
			De aprender matemáticas, lo que me irrita (enoja, enfurece) es	Abierta
		Tristeza	Cuando no puedo resolver un problema matemático, me desespero	Si / No
			De aprender matemáticas, me pone triste	Abierta
		Miedo	Siento nervioso(a) si paso al pizarrón	Si / No
			De aprender matemáticas, lo que me da miedo es	Abierta
		Vergüenza	Me siento culpable cuando no hago tareas	Si / No
			Siento remordimientos cuando	Abierta

Nota: Adaptada de Goleman, D. (2007). Inteligencia social. Ed. Bantam Books

El tipo de preguntas fueron abiertas y cerradas. Las abiertas para analizar aspectos cualitativos y las cerradas para el estudio cuantitativo de cada categoría. Las preguntas cerradas del cuestionario, con opciones de respuesta sí o no, entraron en un proceso de verificación de su confiabilidad, validez y objetividad, requisito indispensable en opinión de Hernández, Fernández y Baptista (2010).

La confiabilidad es el grado en que la aplicación repetida del instrumento al mismo individuo u objeto produce resultados iguales (Hernández, Fernández y Baptista, 2010). Se puede calcular por diversos métodos, sin embargo, para esta investigación seleccionó el coeficiente alfa de Cronbach, dado que la recolección de datos se realizó en una sola aplicación y no se requiere dividir las preguntas, solamente se aplica y se calcula el coeficiente (Cálculo de la confiabilidad, 2014). Al utilizar el coeficiente de correlación alfa de Cronbach, se obtuvo un alfa de 0.958 lo cual representa alto índice de confiabilidad, es decir los resultados de la prueba fueron confiables.

Hernández, Fernández y Baptista (2010) definen la validez como el grado en que un instrumento realmente mide la variable que pretende medir. Refieren tres tipos de validez: de contenido, de criterio y de constructo. Para medir la validez se realizó la validez de contenido a través de juicio de expertos, definida por Escobar y Cuervo (2008) como una opinión de personas que son reconocidas por otros expertos por su trayectoria en el tema que pueden dar información, evidencia, juicios y valoraciones. La validez de contenido se realizó a través de juicio de10 expertos, 5 de psicología y 5 de matemática educativa. Se obtuvo una media de 4.5, por lo que se concluyó que la prueba es válida en su contenido. En el apéndice G se presenta el formato utilizado en la validación de expertos.

La validez de criterio se realizó a través del coeficiente de correlación alfa de Cronbach para revisar si los ítems de cada escala están en el mismo sentido de respuesta. Para realizar el procedimiento de validación se realizó un pilotaje con 30 estudiantes diferentes a los que participaron en la muestra, se recogieron datos en una sola aplicación.

La validez y confiabilidad en la investigación cualitativa no presentan rutas rígidamente definidas, sin embargo, existen algunas similitudes entre autores que tratan sobre este tema. En opinión de Hernández, Fernández y Baptista (2010) los instrumentos de investigación cualitativa deben cumplir criterios de rigor, validez y confiabilidad, y mencionan que los criterios son la dependencia, credibilidad, transferencia y confirmación, sin embargo, no refieren explícitamente el método para realizarlo. Por su parte, Lincoln y Guba (referido por Cohen y Crabtree, 2006) refieren cuatro criterios de validación: credibilidad, transferencia, fiabilidad y confirmabilidad. La credibilidad se refiere a confianza de los hallazgos, la transferencia a la aplicabilidad de los resultados en otros contextos, la fiabilidad a que los mismos resultados podrían encontrarse al repetirse la investigación y la confirmabilidad se refiere a la neutralidad del investigador.

Lincoln y Guba (referido por Cohen y Crabtree, 2006) refieren que las técnicas propuestas para verificar la credibilidad son: compromiso prolongado, observación persistente, triangulación, discusiones entre pares, análisis de casos negativos, adecuación referencial y miembro de comprobación. Para la transferibilidad se requiere la descripción detallada de los hechos. Para la fiabilidad se propone auditoria de resultados. Para la confirmabilidad se propone triangulación de información, diarios de campo y reflexiones. En esta investigación se utilizó la validación por expertos y la postura del investigador fue neutra, por lo que los resultados fueron descritos tal como el estudiante los describía.

En este apartado se describió el instrumento utilizado en esta investigación, así como su proceso de confiabilidad y validez. Para el análisis de la confiabilidad se utilizó el coeficiente alfa de Cronbach, obteniendo un alfa de 0.958, lo cual representa alto índice de confiabilidad. Para medir la validez de contenido se utilizó el juicio de10 expertos, 5 de psicología y 5 de matemática educativa. Se obtuvo una media de 4.5, por lo que se concluyó que la prueba fue válida en su contenido. La validez de criterio se realizó a través del coeficiente de correlación alfa de Cronbach, para revisar si los ítems de cada escala estaban en el mismo sentido de respuesta.

Bibliografía

Anaya, D. A. y Anaya, H. C. (2010). ¿Motivar para aprobar o para aprender? Estrategias de motivación del aprendizaje para los estudiantes. *Tecnología, Ciencia, Educación,* 25(1) 5-14. Recuperado de http://redalyc.org/articulo.oa?id=48215094002

Arancibia, V., Herrera, P. y Strasser, K. (1999). *Psicología de la educación.* México, D.F.: Alfa omega.

Barbero, G. M., Holgado, T. F., Vila, A. E. y Chacón, M. S. (2007). Actitudes, hábitos de estudio y rendimiento en matemáticas: Diferencias por género. *Revista Psicothema*. 19(3), 413-421. Recuperado de http://www.psicothema.com/pdf/3379.pdf

Bustos, N. C. (2012). Creencias docentes y uso de nuevas tecnologías de la información y comunicación en profesores de cinco establecimientos chilenos de educación básica y media. *Revista Universitas Psychologica.* 11(2), 511-521. Recuperado de file:///C:/Users/UTP/Downloads/3042-10750-1-PB.pdf

Caballero, A. y Blanco, L. J. (septiembre, 2007). Las actitudes y emociones ante las matemáticas de los estudiantes para maestros de la facultad de educación de la universidad de Extremadura. *Conocimiento y desarrollo profesional del profesor.* XI simposio de investigación y educación matemática, celebrado en la Universidad de la Laguna, España. Recuperado de http://www.eweb.unex.es/eweb/ljblanco/documentos/anacaba.pdf

Carrasco, A. (2013). Aprendizaje significativo. *Centro de investigaciones universales.* Ciudad Alemán, Veracruz, México. Recuperado de http://unaprendizajesignificativo.blogspot.mx/2008/03/hacia-un-aprendizaje-significativo.html

Castañeda, A. y Álvarez, M. (2004). La reprobación en matemáticas. Dos experiencias. *Tiempo de Educar*, 5(9), 141-172. Recuperado de http://www.redalyc.org/pdf/311/31100906.pdf

Castañeda, J. (2002). *Metodología de la investigación.* México, D.F: Mc Graw Hill.

Chaves, E. E. Castillo, S. M. y Gamboa, A. R. (2008). Creencias de los estudiantes en los procesos de aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. 3(*4), pp. 29-44. Recuperado de http://www.cimm.ucr.ac.cr/cuadernos/cuaderno4/cuaderno4_c2.pdf

CNN México (2013). México ocupa el lugar 48 de 65 en la evaluación de conocimiento de la OCDE. *Expansión en alianza con CNN.* Recuperado de http://mexico.cnn.com/nacional/2010/12/07/mexico-en-el-lugar-48-de-65-en-evaluacion-de-conocimientos-internacional

Creswell, J.W. (2012*). Investigación educativa: Planeando, conduciendo y evaluando la investigación cualitativa y cuantitativa.*4ta ed. Nebraska, Lincoln. EEUU: Pearson.

Cohen, D. y Crabtree, B. (2006). Criterios de evaluación de Lincoln y Guba. *Proyecto de directrices de investigación cualitativa*. Recuperado de http://www.qualres.org/HomeLinc-3684.html

Costillo, B. E., Borrachero, C.A., Brígido, M. M. y Mellado, J. V. (2013). Las emociones sobre la enseñanza-aprendizaje de las ciencias y las matemáticas de futuros profesores de secundaria. *Eureka, 10(1),* 514-532. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=92028937003

De la Cruz, J., Sánchez, J., y Urrutia, C. (2008). *El proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en ingeniería*. Trabajo presentado en el Foro 3 de la Universidad Nacional Autónoma de México. Recuperado de dcb.fi-c.unam.mx/Eventos/Foro3/Memorias/Ponencia_65.pdf

De la Torre, R. C. y Godoy A. A. (2002). Influencia de las atribuciones causales del profesor sobre el rendimiento de los alumnos. *Psicothema*, 14(2), 444-449.

Dilts, R., Grinder, J., Bandler, R. y De Lozier, J. (2014). *Programación neuro-lingüística. Vol. 1. El estudio de la estructura de la experiencia subjetiva*. Publicado en línea por Scribd. Recuperado de http://es.scribd.com/doc/242845998/Richard-Bandler-John-Grinder-Programacion-Neurolinguistica-Vol-1-pdf#scribd

Dilts, R., Zepeda, G., y Delozier (2013). ¿Qué es la programación neurolingüística? Encontrado en línea el 17 de julio de 2013, en http://www.pnl.org.mx

El aprendizaje de las matemáticas, un problema social (julio, 2002). *Gaceta universitaria* Recuperado de http://gaceta.udg.mx/Hemeroteca/paginas/258/258-1415.pdf

Elizalde, A., Martí, M. y Martínez, F. A. (2006). Una revisión crítica del debate sobre las necesidades humanas desde el enfoque centrado en la persona. Polis, *Revista de la*

Universidad Bolivariana, 5(15), 1-18. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=30517306006

Escobar, P. J. (2008). Validez de contenido y juicio de expertos: Una aproximación a su utilización. *Avances en Medición*, 6(1), 27–36. Recuperado de http://www.humanas.unal.edu.co/psicometria/files/7113/8574/5708/Articulo3_Juicio_de_expertos_27-36.pdf

Estrada (2012). La influencia de las emociones y creencias en el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales de primer orden en una institución de educación superior. *Educateconciencia*, 2(2), 142-147.

Evaluación internacional de matemáticas y ciencias (2005). *Segundo informe de resultados TIMSS 2003. Euskadi. Matemáticas*. Bilbao España: ISEI. IVEI. Recuperado de http://www.isei-ivei.net/cast/pub/TIMSSMAT2_CAST.pdf

Fierro, U. M., Rueda, L., Abraham, J., García, E., Jaimes, L. A. y Atuesta, J. (2003). Psicosis y sistemas de creencias. *Revista Colombiana de Psiquiatría*, 32(3), 281-292. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=80632306

Gallegos, C.V., Ahumada, E.O. y Maldonado I.M. (2012). Caracterización del rechazo de los estudiantes de ciencias sociales a las matemáticas en una universidad pública. *XV congreso internacional sobre innovaciones en docencia e investigación en ciencias económico administrativas.* Congreso que se llevó a cabo en la Facultad de Contaduría y Administración de la Universidad Autónoma de Chihuahua, México. Recuperado de http://www.fca.uach.mx/apcam/2014/04/05/Ponencia%2090-UACH.pdf

García, G.M. (2005). Reseña de matemáticas para aprender a pensar. El papel de las creencias en la resolución de problemas, de Antoni Vila Corts y Ma. Luz Callejo de la Vega. *Educación matemática*, 17(2), 167-170. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40517208

Goleman, D. (1995). *Inteligencia emocional.* Edición 70. Barcelona, España: Kairós.

Goleman, D. (1996). *Inteligencia emocional.* Barcelona, España: Kairos.

Goleman, D. (2007). *Inteligencia social*. Barcelona, España: Bantam books.

Goleman, D. (2012). *Inteligencia emocional*. Barcelona, España: Kairos

Gómez, I M. (2002). Afecto y aprendizaje matemático: causas y consecuencias de la interacción emocional. *Reflexiones sobre el pasado, presente y futuro de las matemáticas.* Huelva, España: Ed. Universidad de Huelva. Recuperado de http://eprints.ucm.es/23048/1/IGomez21.pdf

Gómez, M. I. (2007). Sistema de creencias sobre las matemáticas en alumnos de secundaria. *Revista Complutense de Educación*, 18(2), 125-143.

Hernández, R. (31 de Julio de 2013). Altos índices de reprobados en matemáticas. [Periódico el ORBE Tapachula]. Recuperado de http://elorbe.com/seccion-politica/local/2010/10/06/alto-indice-de-reprobados-en-matematicas.html.

Hernández, S. R., Fernández, C. C. y Baptista, L. P. (2010). *Metodología de la investigación.* 5ta ed. México, D.F.: Mc Graw Hill.

Hidalgo, A.S., Maroto, S. A. y Palacios, P. A. (2004). ¿Por qué se rechazan Las matemáticas? Análisis evolutivo y multivariante de actitudes relevantes hacia las matemáticas. *Revista de Educación*, 334(1), 75-95.

Hidalgo, A. S.; Maroto, S. A. y Palacios, P. A. (2005). El perfil emocional matemático como predictor de rechazo escolar: Relación con las destrezas y los conocimientos desde una perspectiva evolutiva. *Educación Matemática*, 17(2), 89-116. Recuperado de http://www.redalyc.org/pdf/405/40517205.pdf#page=22&zoom=90,-142,783

INEGI Nayarit (2014). *Población total del estado de Nayarit.* Cuéntame. Información por entidad. Nayarit. México. Recuperado de http://cuentame.inegi.org.mx/monografias/informacion/nay/poblacion/dinamica.aspx?tema=me&e=18

INEE (2014). *¿Qué es PISA?* Recuperado de http://www.inee.edu.mx/index.php/proyectos/pisa/que-es-pisa

Ibáñez, N. (2002). Las emociones en el aula. *Estudios Pedagógicos 1(*28), 31-45 Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=173513847002

Lincoln, Y.S. y Guba, E.G. (1985). *Investigación naturalista.* Estados Unidos de América: Ed. Sage. Recuperado de http://books.google.com.mx/books?id=2oA9aWlNeooC&pg=PA5&source=gbs_selected_pages&cad=3#v=onepage&q&f=false

Martínez, M. M. (2006). Fundamentación epistemológica del enfoque centrado en la persona p*olis. Revista de la Universidad Bolivariana*, 5(15), 1-15. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=30517306009

Martínez, P.O. (2013). Las creencias en la educación matemática. *Educere,* 17(57), 231-239. Recuperada de http://www.redalyc.org/pdf/356/35630152008.pdf

Martorell, C. (2014). La PNL el Lenguaje del cuerpo y la inteligencia emocional en la comunicación y las relaciones públicas. [Presentación en línea].Recuperado de http://www.slideshare.net/pedromorchon/pnl-e-inteligencia-emocional

Meireu, P. (2013). Proyectos y propuestas creativas en educación. [Presentación en línea]. Recuperado de http://www.educared.org/global/ppce/el-conocimiento-metacognitivo

Millrood, R. (2004). El rol de la PNL en el discurso de profesores en. *ELT Journal*, 58 (1). Recuperado de http://search.proquest.com.ezproxylocal.library.nova.edu/docview/85588344?accountid=6579

Moreira, M. (2012). Mapas conceptuales y aprendizaje significativo. *Revista Galaico Portuguesa de Sociopedagogía y socio-lingüística*, 11(2). Recuperado de http://www.if.ufrgs.br/~moreira/mapasesp.pdf

O’ Connor, J. (2011). *Unidad de conocimiento. La programación neurolingüística.* Barcelona, España: Factor Huma. Disponible en http://www.factorhuma.org/attachments_secure/article/8863/pnl_cast.pdf

Ortega, M. (2006). *Una propuesta didáctica para la enseñanza de la función exponencial y logarítmica con el uso de diferentes registros de representaciones semióticas*. Tesis sin publicar. U. de G., México.

Ortego, C. (2013). Creencias y emociones. [Video publicado por Carmen M Sarabia Cobo el14/01/2013]**.** Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=XpGsPUEUEAo

Ortiz, L. (1 de julio de 2002). El aprendizaje de las matemáticas, un problema social. *Gaceta universitaria*. Recuperado de http://www.gaceta.udg.mx/Hemeroteca/paginas/258/258-1415.pdf

Parra, H. (2005). Creencias matemáticas y la relación entre actores del contexto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 8(1) 69-90. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33508104

Pekrun, R (2005). *Emociones en educación.* Estados Unidos de América: Ed. Series de psicología educativa.

Pekrun, R. y Linnenbrink, G. L. (2014). Manual internacional de emociones en educación. Nueva York, NY. Ed. Routledge.

Rebollo, C. M., García, P. R., Barragán, S. R. y Vega, C. L. (2008). Las emociones en el aprendizaje online. *Relieve*, 14(1), 1-23. Recuperado de http://www.uv.es/RELIEVE/v14n1/RELIEVEv14n1_2.htm

Robles, R. (2005). La reprobación de matemáticas desde la perspectiva del alumno, del docente y la academia. *Psicología y Educación.* 1 (1). Recuperado de http://www.uv.mx/ipe/documents/Lareprobaciondematematicas.PDF

Rodríguez, M. (2010). La Teoría del aprendizaje significativo en la perspectiva de la psicología cognitiva. España: Ediciones octaedro. Recuperado de http://edicionesmagina.com/pdf/10112.pdf

Rodríguez, M. Moreira M. y Caballero M. (2010). La teoría del aprendizaje significativo en la perspectiva de la psicología cognitiva. España: Ediciones octaedro.

Rinis, D., y Vlachos, K. (2013). Explorando libros electrónicos para mejorar las inteligencias múltiples. *Revista de Investigaciones en Enseñanza y Aprendizaje de la Lengua. 4(1)*, 81-98.

Rodríguez, M. (17 de julio de 2013). Las inteligencias múltiples. [Mensaje en un blog]. Recuperado de http://bibliotecaalconetar.blogspot.mx/2012/03/las-inteligencias-multiples.html

Sánchez, S.D. (2009). Las creencias en la matemática. *Memorias del VI coloquio de experiencias educativas en el contexto universitario*. Habana, Cuba: Editorial universitaria.

Strongone, J. (2013). La PNL en la educación. [Foro en línea]. Recuperado de http://josestrongone.com/images/articulos_y_ensayos/LA%20PNL%20En%20LA%20EDUCACI%D3N.pdf

Teorías del aprendizaje en psicología educativa (2013). Teoría de *metacognición de John Flavel.* Recuperado de http://www.lifecircles-inc.com/Learningtheories/constructivism/flavell.html

Vecina, J. M. (2006). Emociones positivas. *Revista Papeles del Psicólogo*, 27(1). Encontrado en http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=77827103

Velazco, E. (5 de marzo de 2014). Éxito: ¿mito o realidad? [Foro en línea]. Recuperado de http://www.ganaropciones.com/exito-pnl.htm

Velazco, E. (5 de marzo de 2014). PNL Influencia Irresistible. [Archivo de video]. Recuperado de en:http://www.youtube.com/watch?v=JzWA5NvW_WU&list=PLUre9FMm1er9Ub0DX-97p44xez9IdrZoG

Vivas, M., Gallego, D. y González, B. (2014). *Educar las emociones*. Mérida, Venezuela: Producciones editoriales C. A. Recuperado de http://www.escoltesiguies.cat/files/u21417/libro_educar_emociones.pdf

Vizcaíno, A. E., Manzano, M. M. y Casas, C. G. (2015). Validez de constructo y confiabilidad del cuestionario de creencias epistemológicas sobre la matemática en alumnos de secundaria básica. *Revista Colombiana de Psicología*, 24(2), 301-316. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=80441602005

Propuesta didáctica para el aprendizaje de la función exponencial y logarítmica

María Inés Ortega Arcega
José Trinidad Ulloa Ibarra
David Zamora Caloca
Jonathan Jair Gonzales Ortega

Este documento presenta materiales didácticos se diseñaron de acuerdo al constructivismo y la teoría de Duval sobre los registros de representación semiótica:

Manual de Winplot

Introducción

El objetivo de este manual, es el manejo del programa de winplot para la visualización de las funciones exponenciales y logarítmicas, a través de sus propiedades tales como dominio, rango, carácter de crecimiento e intersección con los ejes así como las operaciones.

En el manejo de los comandos encontramos:

1. Operaciones Básicas

La suma la indicamos con **+,** la resta con **-,** la multiplicación ***,** la división **/,** la exponenciación, ^. Primero se introduce el número que se va a elevar a una potencia (la base), después el símbolo (que indica a qué potencia de la base) seguida del número. Si los números de la potencia contienen signos negativos o fracciones, se debe especificar la potencia entre paréntesis para que el número encerrado indique la potencia a la que hay que elevar la base (algunos teclados no traen el símbolo ^, en este caso se oprime alt + 94).

2. Introducción de operaciones

Winplot reconoce la notación algebraica. Por ejemplo, las funciones $f(x) = 25x$ se introducen indistintamente como $25x$ ó $25*x$.

Para operar algebraicamente, se siguen las reglas del álgebra ordinaria en cuanto a las reglas de asociación, y en cuanto a la jerarquía de los operadores tiene mayor jerarquía que los operadores * y /; estos a su vez tiene mayor jerarquía que los operadores + y -.

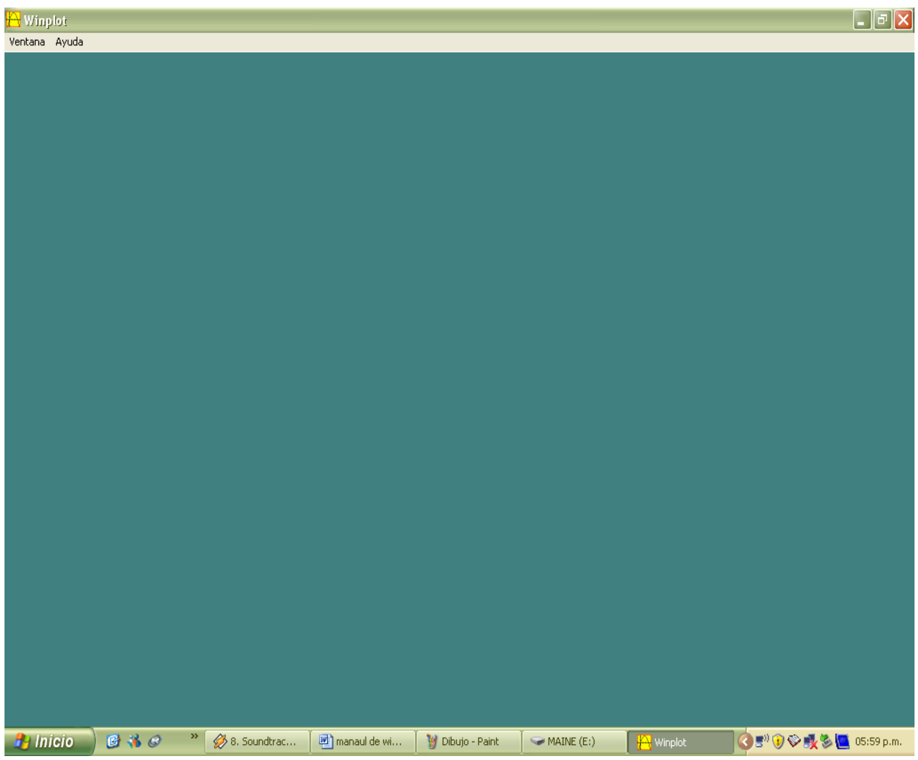
3. Llamado de funciones básicas de la biblioteca de winplot

Existen también funciones básicas preconstruidas en la biblioteca algunas de ellas son:

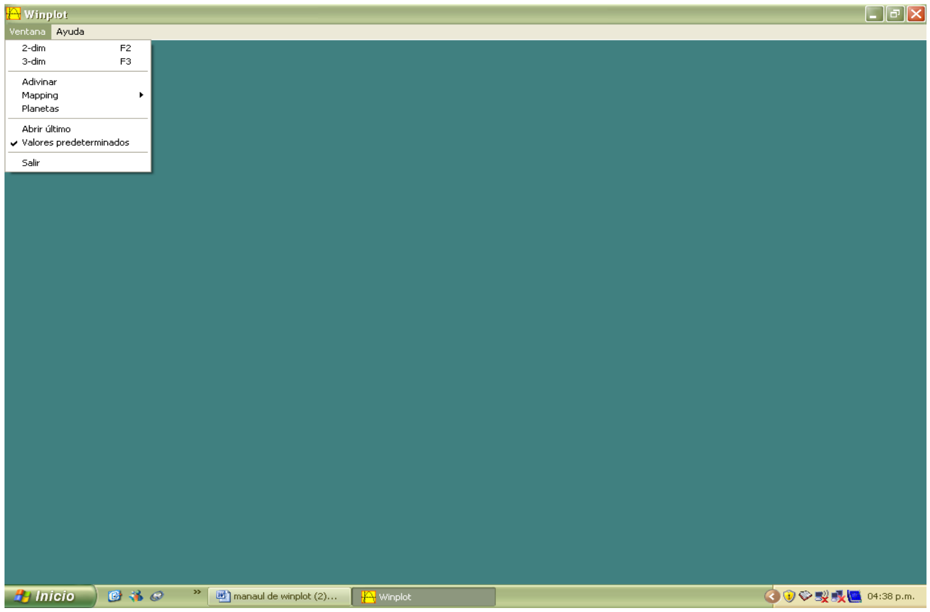
- $\ln(x)$ para el logaritmo natural de x
- $\log(x)$ para el logaritmo de base 10 de x
- $\log(b,x)$ para el logaritmo de base b, con
- $\exp(x)$ para la exponencial de x
- $sqr(x)$ es la raíz cuadrada de x (para $x > 0$)
- $abs(x)$ para el valor absoluto de x
- pi para denotar el valor constante p = 3.1415926...

Debe notarse que el valor de los argumentos va siempre entre paréntesis, de otro modo Winplot no los reconoce.

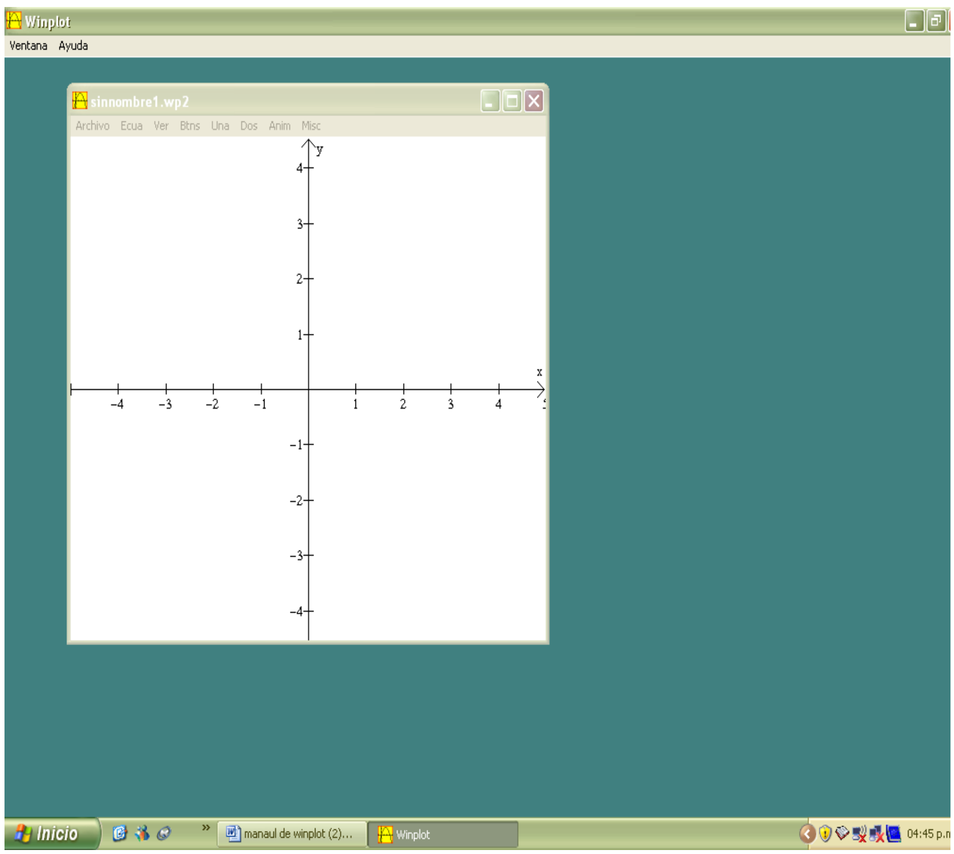
La primera vez que accede a **winplot**, aparece una pantalla como esta donde se distinguen dos menús: **ventana** y **ayuda**.



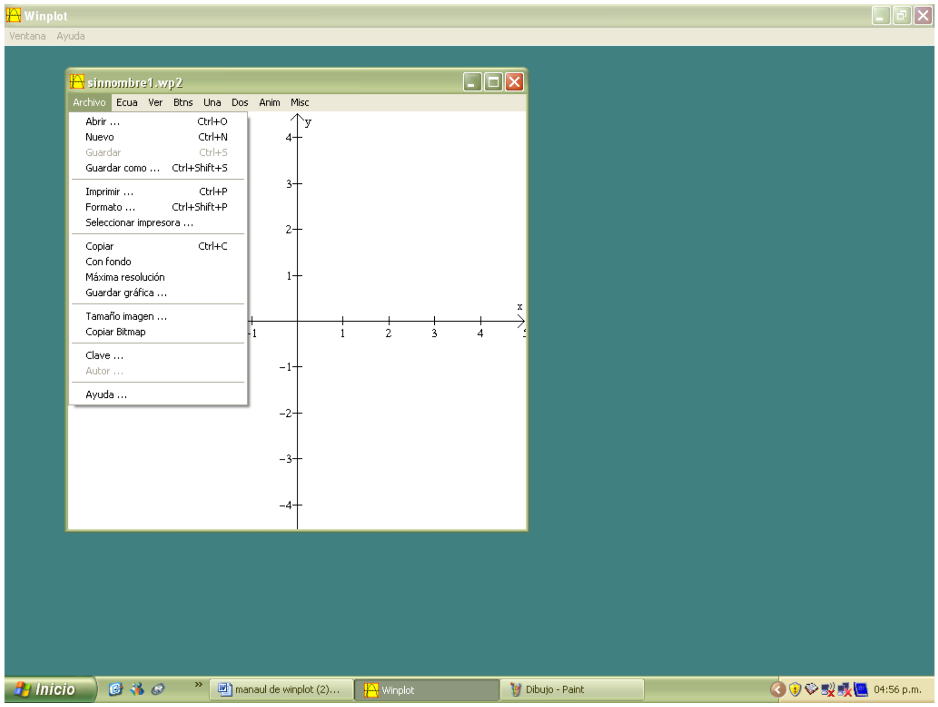
Si damos un doble clic en el botón izquierdo del ratón en ventana obtenemos la pantalla:



En **2-dim** obtenemos una ventana nueva que tiene nombre por omisión sinnombre 1.wp2 en esta nueva pantalla aparece los menús: Archivo, Ecuación, Ver, Btns, Una, Dos, Anim, Misc.



Al activar Archivo obtenemos la pantalla

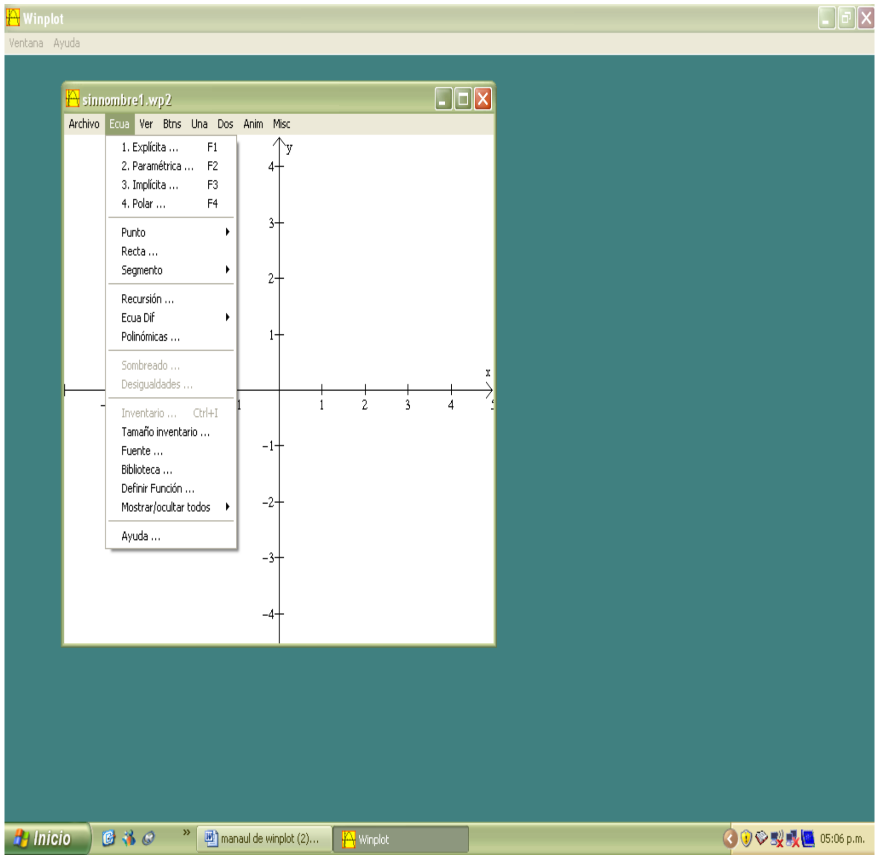


Donde encontramos las opciones para abrir, guardar, imprimir, copiar.

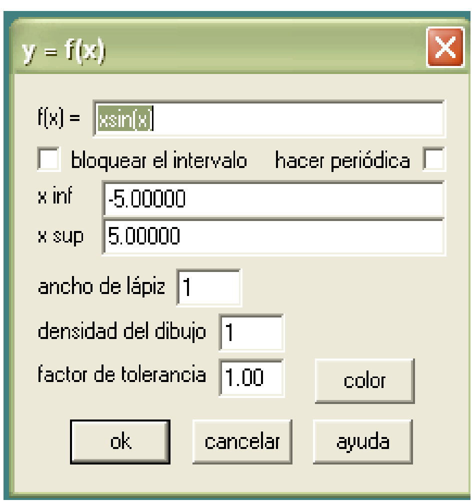
El manual esta creado solo para graficar las funciones exponenciales y logarítmicas nos concentraremos solo en lo más necesario para sus graficas.

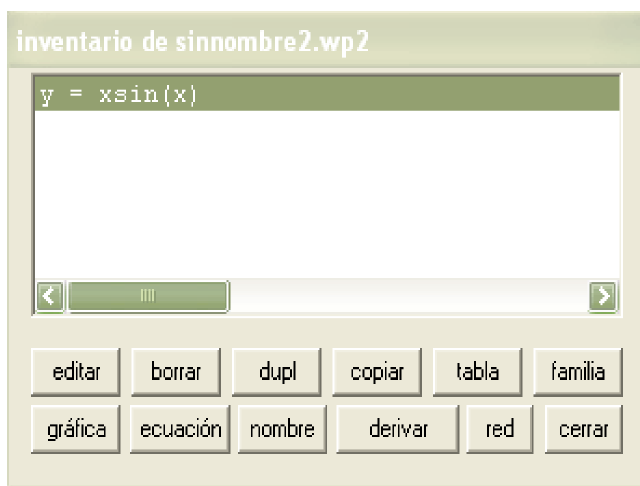
Copiar, Cuando se activa esta opción (que sustituye a la acción ctrl+C), se manda una imagen al portapapeles de Windows, desde donde podemos “pegarla” a cualquier aplicación Windows (en la mayoría de las aplicaciones, es posible pegar usando la combinación ctrl+V o seleccionando la opción pegar del menú Edición).

El siguiente menú es Ecua solo nos interesa los iconos de comando explicita y punto.



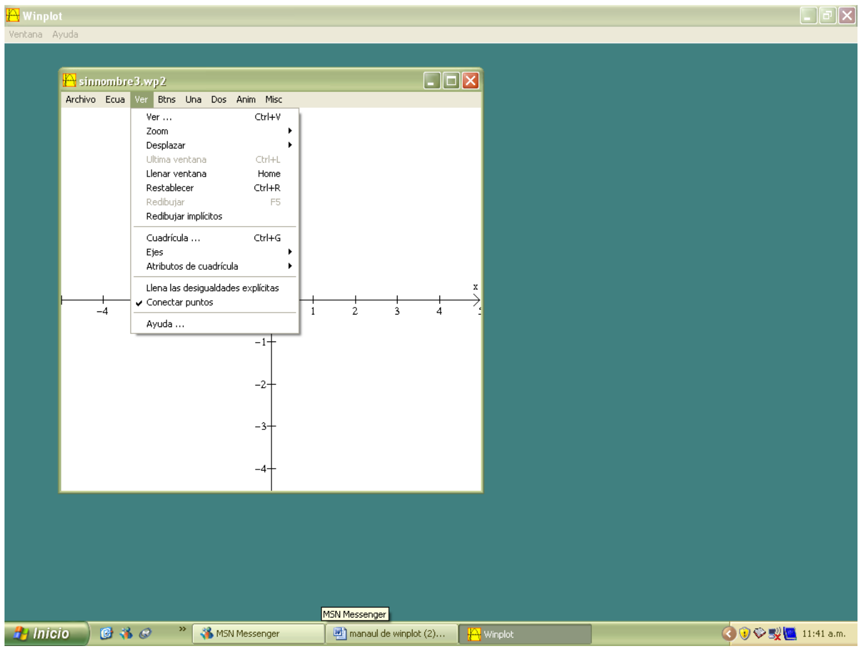
Al activar ecuación explicita aparece una caja de dialogo $y = f(x)$, donde podrás anotar la función que deseas graficar.

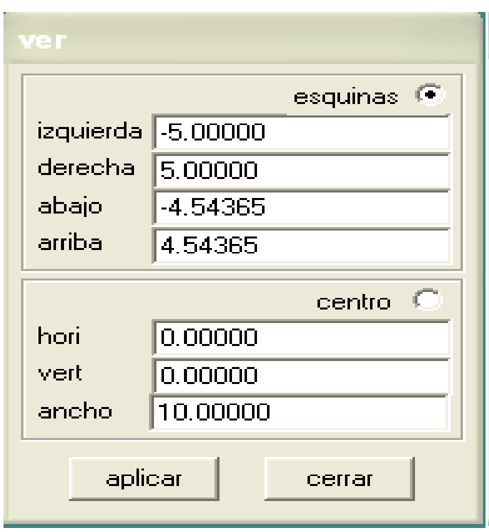


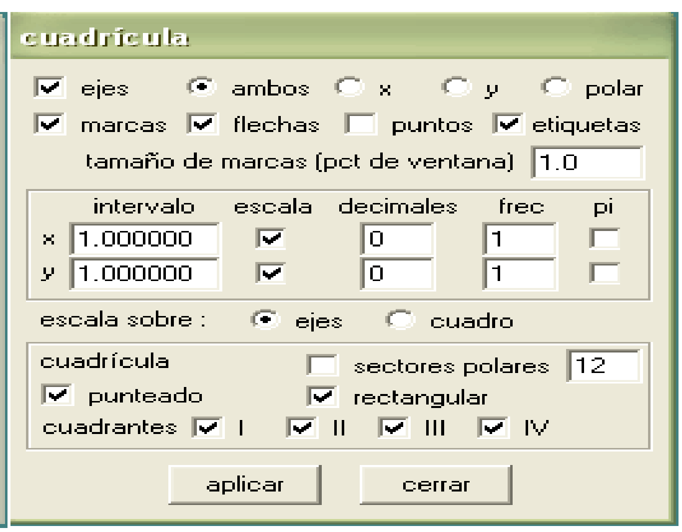


Después de escribir la ecuación y activar OK, aparece Otra caja de dialogo llamada inventario, donde aparecen los botones; editar, se utiliza para volver editar la función escrita; borrar, borra la función y la grafica; dupl, en el mismo eje coordenado se puede hacer mas de una función; tabla, muestra los valores de las ordenadas y abscisas; ecuación, muestra en la ventana de la grafica la función en forma analítica.

El siguiente menú es ver. Si activas ver y ejes obtienes dos cajas de dialogo como las siguientes.







Ver te muestra graficarte los valores del dominio *x* y rango *y*, puedes modificarlos de acuerdo a tus necesidades; cuadricula te ayuda a visualizar los puntos importantes de la grafica (deben de estar activados con una palomita si no están activados tu los activas con un clic), dentro de la caja de dialogo de cuadricula esta el comando intervalos con este comando puedes modificar las escalas de los ejes.

4. Actividades de introducción

Con ayuda de winplot grafica las siguientes funciones, represéntalas en el mismo sistema cartesiano, representa con puntos la intersecciones con los ejes de cada una, así como la intersección de las tres funciones.

a) $f(x) = 2x$ **b)** $g(x) = x^2$ **c)** $h(x) = 2^x$

1**.** Selecciona con dos clics en el botón izquierdo del ratón el icono de "winplot" (para abrir el programa).

2**.** Selecciona con un clic el menú "ventana", activa "2 dim"**.**

3**.** Selecciona con un clic el menú "Ecua", activa "explicita".

4. En la caja de dialogo $y = f(x)$, introduce la función $f(x) = 2x$, (puedes hacer tus graficas de colores en la caja de dialogo aparece la opción color) activa OK.

5. Para graficar la segunda función $g(x) = x^2$ en la caja de dialogo "inventario", activa el formato "dupl" sin borrar la original., editas la segunda función, para la tercera función repites el mismo procedimiento.

6. Selecciona con un clic el menú "ver" activa "cuadricula" selecciona punteado rectangular, con la cuadricula activada podrás visualizar los puntos de corte entre las graficas y los ejes. Selecciona el menú "ecua" activa "punto (x,y)" en la caja de dialogo anota la ordena y abscisa del punto buscado.

d) grafica en winplot $\log_3 x$, destaca con colores diferentes los puntos (3,1); (9,2); (27,3); (253,5). Utiliza la caja de dialogo "cuadricula" para cambiar los intervalos.

e) Grafica $y = (1.5)^x$, y = 3^{-x}

Criterios de evaluación

Para evaluar solución de cada ejercicio se asigna un puntaje de acuerdo al siguiente criterio:

Nivel	**Mal**	**Regular**	**Bien**	**Excelente**
Puntaje	0	1	2	3
Criterio	No hay solución o solución Incorrecta	Solución incompleta y contiene errores	Solución completa con pocos errores	Solución completa sin errores

Cuaderno de trabajo

Prácticas con Winplot en la las graficación de funciones

Objetivo: Introducir a los alumnos al manejo de los recursos de Winplot para construcción de las gráficas de funciones.

Instrucciones: Con ayuda de Winplot graficar las siguientes funciones, represéntalas en el mismo sistema cartesiano, representa con puntos la intersecciones con los ejes de cada una, así como la intersección de las tres funciones.

a) $f(x) = 2x$ **b)** $g(x) = x^2$ **c)** $h(x) = 2^x$

1. Selecciona con dos clics en el botón izquierdo del ratón el icono de "winplot" (para abrir el programa).

2. Selecciona con un clic el menú "ventana", activa "2 dim".

3. Selecciona con un clic el menú "Ecua", activa "explicita".

4. En la caja de dialogo $y = f(x)$, introduce la función $f(x) = 2x$, (puedes hacer tus graficas de colores en la caja de dialogo aparece la opción color) activa OK.

5. Para graficar la segunda función $g(x) = x^2$ en la caja de dialogo "inventario", activa el formato "dupl" sin borrar la original., editas la segunda función, para la tercera función repites el mismo procedimiento.

6. Selecciona con un clic el menú "ver" activa "cuadricula" selecciona punteado rectangular, con la cuadricula activada podrás visualizar los puntos de corte entre las graficas y los ejes. Selecciona el menú "ecua" activa "punto (x,y)" en la caja de dialogo anota la ordena y abscisa del punto buscado.

d) grafica en winplot $\log_3 x$, destaca con colores diferentes los puntos (3,1); (9,2); (27,3); (253,5). Utiliza la caja de dialogo "cuadricula" para cambiar los intervalos.

e) Grafica $y = (1.5)^x$, y = 3^{-x}

Criterios de evaluación

Para evaluar solución de cada ejercicio se asigna un puntaje de acuerdo al siguiente criterio:

Nivel	No satisfactorio	Satisfactorio	Bueno

Puntaje	0	1	2
Criterio	Incorrecto	Contiene errores	Correcto

Actividad extraclase

1. Leer la Lectura 1 “Breve historia de las funciones logarítmicas y exponenciales y sus aplicaciones en la ciencia”.
2. Hacer una búsqueda en la bibliografía y en Internet sobre las diferentes aplicaciones a la ciencia de las funciones exponencial y logarítmica.
3. Escribir sus resultados (de 2 a 4 ejemplos) en las representaciones gráfica y analítica.

Actividad 1. Breve historia de las funciones logarítmica y exponencial y sus aplicaciones en ciencias

Objetivo

1. Introducir a los alumnos a la historia de desarrollo y la aplicación de las funciones logarítmica y exponencial en ciencias.
2. Motivar y despertar interés para el aprendizaje de las funciones logarítmica y exponencial.
3. Dar a conocer algunos aspectos de las funciones tales como variable, la forma grafica, carácter de crecimiento y las representaciones analíticas y graficas

Instrucciones

1. En equipo discutan la actividad extractase; así como la asociación, la dependencia e independencia de variables, concluyan cómo son las gráficas de las funciones exponencial y logarítmica. (forma, intersecciones con los ejes de coordenadas, características de su crecimiento).
2. el director promueve la participación de los integrantes. El secretario recopila las aportaciones. Preparan y hacen una presentación del mejor trabajo de las aplicaciones a la ciencia de las funciones exponencial y logarítmica.
3. Hacer comentarios y preguntas sobre la presentación.
4. Bajo la dirección del profesor evalúan los trabajos presentados.
5. Entregan al profesor el trabajo de cada equipo.

Extraclase

1. Leer la Lectura 2 “Función exponencial y sus propiedades (enfoque analítico, verbal y gráfico)”.

Actividad 2. Función exponencial y sus propiedades (enfoque analítico, gráfico y verbal)

Objetivo

1. Dar a conocer la función exponencial y sus propiedades (la forma analítica y verbal).
2. Dar a conocer gráficas de las funciones exponenciales y sus propiedades.
3. Realizar operación con funciones.

Instrucciones

1. En equipo discutan la actividad extractase definición de la función exponencial (b>0 y $b \neq 1$), las propiedades de las funciones (dominio, rango, intersección con los ejes, carácter de crecimiento) y las operaciones con funciones.
2. Resuelvan las actividades propuestas en el ejercicio 2. El director promueve la participación de los integrantes. El secretario recopila las aportaciones. Preparan y hacen una presentación de los resultados de la función exponencial y sus propiedades
3. Hacen comentarios y preguntas sobre la presentación.
4. Bajo la dirección del profesor evalúan los trabajos presentados.
5. Entregan al profesor el trabajo de cada equipo.

Ejercicios 2

Determina y describa en forma analítica, verbal y gráfica el dominio, rango, carácter de crecimiento e intersección con los ejes de coordenadas de las cada las funciones:

a) $m = y \cdot h$, **b)** $z = y * y$, si $y = 2^x$ y $h = 2^{2x}$

c) $j = t \cdot k$, **d)** $w = t * t$, si $t = 2^{-x}$ y $k = 2$

Criterios de evaluación

Para evaluar la solución de cada ejercicio se asigna un puntaje de acuerdo al siguiente criterio:

Nivel	**No satisfactorio**	**Satisfactorio**	**Bueno**
Puntaje	0	1	2
Criterio	Incorrecto	Contiene errores	Correcto

Actividad extraclase

1. Leer la Lectura 3 “Traducción entre las representaciones analíticas, gráficas y verbales de la función exponencial y sus propiedades”.

Actividad 3. Traducción entre las representaciones analíticas, graficas y verbal de la función exponencial y sus propiedades.

Objetivo

1. Analizar el comportamiento gráfico y analítico de las funciones exponenciales

2. Pasar con facilidad de una representación a otra.

Instrucciones

1. En equipo realizan (programa winplot), discutan y presentan. El ejercicio 3.
2. En equipo preparen una síntesis de las diferentes representaciones analítica, gráfica y verbal de la función exponencial $y = b^x$ y sus propiedades.
3. El director promueve la participación de los integrantes. El secretario recopila las aportaciones preparan una presentación de la traducción entre las representaciones analíticas, graficas y verbales de la función exponencial y sus propiedades.
4. Entregan al profesor en un disket el trabajo de cada equipo.
5. Unos equipos hacen presentación de sus trabajos a todo el grupo.
6. Hacer comentarios y preguntas sobre la presentación.
7. Bajo la dirección del profesor evalúan los trabajos presentados.

Ejercicios 3.

a. Resuelve en forma analítica y verbal intersecciones, dominio, rango, carácter de crecimiento la función $y = 3^{2x}$. ¿De que otra forma se puede representar?

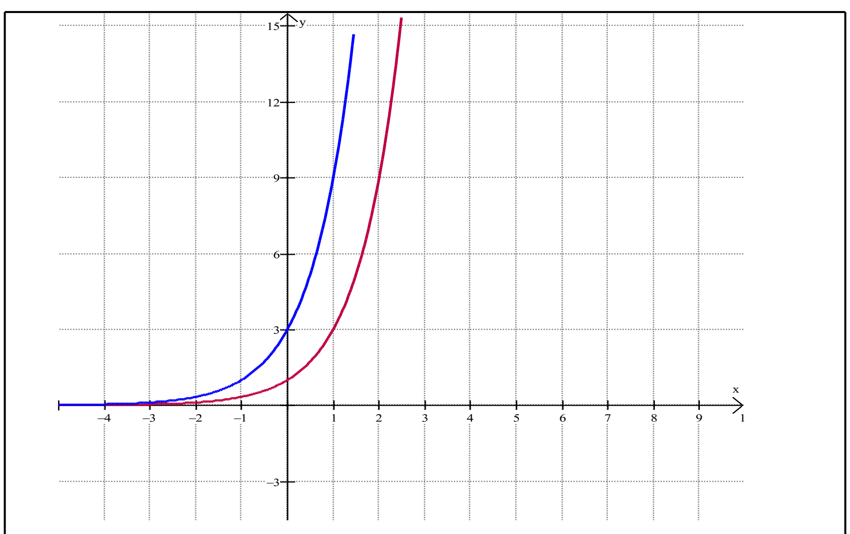
b. Sean las funciones $y = 2^x, m = 5^x$

¿En que punto se cortan ambas funciones?

¿En que intervalo del dominio la función $m = 5^x$ se encuentra por encima de la función $y = 2^x$?

¿En que intervalo se encontrará por debajo?

c. Dadas las gráficas que te presentamos ¿Cuál de ellas presenta menor base? Justifica tu respuesta.



Criterios de evaluación

Para evaluar la solución de cada ejercicio se asigna un puntaje de acuerdo al siguiente criterio:

Nivel	No satisfactorio	Satisfactorio	Bueno
Puntaje	0	1	2
Criterio	Incorrecto	Contiene errores	Correcto

Actividad Extraclase

1. Leer la Lectura 4 "Función logarítmica y sus propiedades (enfoque analítico, grafico y verbal)"

Actividad 4. Función logarítmica y sus propiedades (enfoque analítico, grafico y verbal).

Objetivo

1. Dar a conocer la función logarítmica y sus propiedades (la forma analítica, grafica y verbal.

Instrucciones

1. En equipo realicen una discusión de la lectura 4: definición, las propiedades de las funciones, relacionar las bases de los logaritmos con las exponenciales, como es gráficamente una curva respecto a otra cuándo es pequeña la base.
2. En equipo realizan, discutan y presentan. El ejercicio 4.
3. El director promueve la participación de los integrantes. El secretario recopila las aportaciones preparan una presentación de la función logarítmica y sus propiedades (enfoque analítico, grafico y verbal).
4. Entregan al profesor en un disket el trabajo de cada equipo.
5. Unos equipos hacen presentación de sus trabajos a todo el grupo.
6. Hacer comentarios y preguntas sobre la presentación.
7. Bajo la dirección del profesor evalúan los trabajos presentados.

Ejercicios 4

a). Sean las funciones $y = \log_5 x$, $y = \log_6 x$. Resuelve analíticamente.

¿En que punto se cortan ambas funciones? ¿En que intervalo del dominio se encuentra una función por encima de la otra. Y por debajo en que zona?

b). En la función $y = \log_4 x$, representada en el ejercicio anterior. ¿Cuándo obtendremos logaritmos mayores que cero? ¿Y menores que cero?

c). ¿Cual es la inversa de $y = \log_4 x$?, expresa las dos funciones en forma analítica y verbal.

d). Comprueba graficando, los resultados de los incisos a), b) y c).

e). Compara las graficas $y = -\log_2 x,\ y = \log_{\frac{1}{2}} x$ y $y = -\log_5 x,\ y = \log_{\frac{1}{5}} x$ e). Establece en forma analítica y verbal una conclusión general.

Criterios de evaluación

Para evaluar la solución de cada ejercicio se asigna un puntaje de acuerdo al siguiente criterio:

Nivel	**No satisfactorio**	**Satisfactorio**	**Bueno**
Puntaje	0	1	2
Criterio	Incorrecto	Contiene errores	Correcto

Actividad Extraclase

1. Leer la lectura 5 "traducción entre las representaciones analíticas, graficas y verbales de la función logarítmica y sus propiedades"

Actividad 5. Traducción entre las representaciones analíticas, graficas y verbales de la función logarítmica y sus propiedades.

Objetivo

1. Analizar el comportamiento gráfico y analítico de las funciones logarítmicas

2. Pasar con facilidad de una representación a otra.

Instrucciones

1. En equipo realizan (programa winplot), discutan y presentan. El ejercicio 5.
2. En equipo preparen una síntesis de las diferentes representaciones analítica, gráfica y verbal de la función exponencial $y = \log_b x$ y sus propiedades.
3. El director promueve la participación de los integrantes. El secretario recopila las aportaciones preparan una presentación de la traducción entre las representaciones analíticas, graficas y verbales de la función exponencial y sus propiedades.
4. Entregan al profesor en un disket el trabajo de cada equipo.
5. Unos equipos hacen presentación de sus trabajos a todo el grupo.
6. Hacer comentarios y preguntas sobre la presentación.
7. Bajo la dirección del profesor evalúan los trabajos presentados.

Ejercicios 5

a) Si podemos expresar el logaritmo en base 8, en función del logaritmo en base 2, mediante la relación $y = \log_8 x \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}\log_2 x$, grafica y explica como obtenemos esa expresión. Encuentren alguna relación entre las representaciones gráficas del logaritmo en base 8 y el logaritmo en base 2, de acuerdo a la relación anterior.

b) Con base en los resultados obtenidos de a), expresen la función $y = \log_9 x$ en la base 3, comprueben graficando

c) Las funciones $y = \log x$, $y = \log x^2$. ¿Son iguales?, expliquen cuál es el dominio de cada una de ellas.

Criterios de evaluación

Para evaluar la solución de cada ejercicio se asigna un puntaje de acuerdo al siguiente criterio:

Nivel	**No satisfactorio**	**Satisfactorio**	**Bueno**
Puntaje	0	1	2
Criterio	Incorrecto	Contiene errores	Correcto

Actividad Extraclase

1. Leer la lectura 6 “Solución, analítica de ecuaciones logarítmicas y exponenciales”

Actividad 6. Solución analítica de ecuaciones logarítmicas y exponenciales

Objetivo

1. Resolver analíticamente ecuaciones logarítmicas y exponenciales

2. Verificar la solución de las ecuaciones logarítmicas y exponenciales.

Instrucciones

1. En equipo realicen una discusión de la lectura 6: la relación $b^{x_1} = b^{x_2}$ entonces $x_1 = x_2$ y $\log x_1 = \log x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$, el como seria la solución grafica de la ecuaciones exponenciales y logarítmicas, diferencia entre una función y una ecuación.
2. En equipo resuelvan las actividades propuestas en el ejercicio 6.
3. El director promueve la participación de los integrantes. El secretario recopila las aportaciones preparan una presentación de la traducción entre las representaciones analíticas, graficas y verbales de la función exponencial y sus propiedades.
4. Entregan al profesor en un disket el trabajo de cada equipo.

5. Unos equipos hacen presentación de sus trabajos a todo el grupo.
6. Hacer comentarios y preguntas sobre la presentación.
7. Bajo la dirección del profesor evalúan los trabajos presentados.

Ejercicios 6

a). $4^{x^2-11x+30}=16$ **b)** $3^{x+2}+3^{x+1}+3^{x}+3^{x-1}=120$ **c).** $9^{x}-2*3^{x}-3=0$

d). $\log(x^2+2x)=\log 3$ **d).** $\log(x+6)=1+\log(x+3)$ **e).** $\log(3-x^2)=\log 2+\log x$

Criterios de evaluación

Para evaluar los ejercicios se asigna un puntaje de acuerdo al siguiente criterio

Nivel	**Mal**	**regular**	**Bien**	**Excelente**
Puntaje	0	1	2	3
criterio	Incorrecto	Contiene errores	incompleto	Completo

Actividad Extraclase

1. Leer la lectura 7 “soluciones grafica de ecuaciones logarítmicas y exponenciales”

Actividad 7. Solución grafica de ecuaciones logarítmicas y exponenciales

Objetivo

1. Resolver gráficamente ecuaciones logarítmicas y exponenciales
2. Verificar la solución de las ecuaciones logarítmicas y exponenciales.

Instrucciones

1. En equipo realicen una discusión de la lectura 7.
2. En equipo resuelvan las actividades propuestas en winplot el ejercicio 7 y discute la relación de la solución grafica con la solución analítica (actividad 6) del las ecuaciones logarítmicas y exponenciales.
3. El director promueve la participación de los integrantes. El secretario recopila las aportaciones preparan una presentación de la traducción entre las representaciones analíticas, graficas y verbales de la función exponencial y sus propiedades.
4. Entregan al profesor en un disket el trabajo de cada equipo.
5. Unos equipos hacen presentación de sus trabajos a todo el grupo.
6. Hacer comentarios y preguntas sobre la presentación.

7. Bajo la dirección del profesor evalúan los trabajos presentados.

Ejercicios 7

Resuelve en winplot las siguientes ecuaciones.

a). $4^{x^2-11x+30}=16$ **b)** $3^{x+2}+3^{x+1}+3^{x}+3^{x-1}=120$ **c).** $9^{x}-2*3^{x}-3=0$

d). $\log(x^2+2x)=\log 3$ **d).** $\log(x+6)=1+\log(x+3)$ **e).** $\log(3-x^2)=\log 2+\log x$

Criterios de evaluación

Para evaluar los ejercicios se asigna un puntaje de acuerdo al siguiente criterio

Nivel	**Mal**	**regular**	**Bien**	**Excelente**
Puntaje	0	1	2	3
criterio	Incorrecto	Contiene errores	incompleto	Completo

FORMULARIO

Exponentes

Resuelve la multiplicación a^2*a^3. Al simplificar $(a\cdot a)(a\cdot a\cdot a)=a^8$, también se puede resolver por la ley del producto para exponentes.

Si *m* y *n* son números naturales y *b* es cualquier número real, entonces

$b^m*b^n=b^{m+n}$ ………………………………………………………….. **(Ley 1)**

$\boxed{1}$ $\boxed{1}$

Resuelve la división $\frac{a^4}{a^2}=\frac{a\cdot a\cdot a\cdot a}{a\cdot a}=a^2$ también se puede resolver por la ley de la división que dice:

Si *b* es cualquier número distinto de cero y *m*, *n* son enteros diferentes de cero entonces $\frac{b^m}{b^n}=b^{m-n}$ …………………………………………………**(Ley 2)**

Resuelve $\frac{a}{a^3}=\frac{a}{a.a.a}=\frac{1}{a^2}$ por **ley 2** $\frac{a}{a^3}=a^{3-1}=a^{-2}$ entonces $\frac{1}{a^2}=a^{-2}$.

Para cualquier real, *b* diferente de cero y cualquier número entero no negativo,

$b^{-m} = \dfrac{1}{b^m}$ ……………………………………………………………………… **(Ley 3)**

Resuelve $\dfrac{a^3}{a^3} = \dfrac{a.a.a}{a.a.a} = 1$ por **ley 2** $\dfrac{a^3}{a^3} = a^{3-3} = a^0$ entonces 1= y^0.

Si *b* es cualquier número real distinto de cero entonces $b^0 = 1$ ……... **(Ley 4)**

Resuelve $\left(a^3\right)^2$ simplificando $a^3 \cdot a^3 = a^6$ también se puede resolver por la ley

de la potencia que dice:

Si *b* es un número real y *m* y *n* son enteros entonces $(b^m)^n = b^{m*n}$ … **(ley 5**).

Resuelve $(cd)^2$ simplificando $(cd)(cd) = c^2 d^2$ también se puede resolver por la ley de elevar un producto a una potencia dice:

Si *a* y *b* son números reales y *m* es un entero entonces $(ab)^m = a^m b^n$ …. **(Ley 6)**

Resuelve $\left(\dfrac{c}{d}\right)^2$ simplificando $\left(\dfrac{c}{d}\right)\left(\dfrac{c}{d}\right) = \dfrac{c^2}{d^2}$ también se puede resolver por la le de elevar un cociente a una potencia que dice:

Si a y b son números reales y m es un entero entonces $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$ ……. **(Ley 7)**

$\sqrt[n]{b} = b^{\frac{1}{n}}$ **……………………………………………………….. (Ley 8).**

Logaritmos

Toda ecuación de la forma e $y = f(x) = \log_b x$**, define una función logarítmica. La relación que existe con las potencias acarrea una serie de consecuencias:**

1ª el logaritmo en cualquier base de 1 es 0**,** ya que**:**

$$\log_b 1 = 0 \Leftrightarrow b^0 = 1$$

2ª el logaritmo de la base, siempre es la unidad:

$$\log_b b = 1 \Leftrightarrow b^1 = b$$

3ª la base del logaritmo será un número positivo y diferente de la unidad:

$$\mathbf{b > 0 \text{ y } b} \neq 1$$

4ª solamente se pueden calcular los logaritmos de números positivos, pues cualquiera que sea el exponente de una potencia el resultado de ella siempre es un número mayor que cero

$$x > 0$$

Propiedades de los logaritmos:

$$\log_b (u * v) = \log_b u + \log_b v$$

$$\log_b \left(\frac{u}{v}\right) = \log_b u - \log_b v$$

$$\log_b u^n = n * \log_b u$$

$$\log_b \sqrt[n]{u} = \frac{1}{n} * \log_b u$$

Los logaritmos que más se suelen utilizar son:

- Cuando la base b = 10, es lo que se llama logaritmo decimal. Cuando al escribir un logaritmo no aparezca la base, se tratará de un logaritmo decimal.

Cuando la base $b = e$ = 2,718281... , entonces tendremos lo que se denomina un logaritmo neperiano, y que lo representaremos por ln.

LECTURA 1

HISTORIA DE LAS FUNCIONES LOGARÍTMICA Y EXPONENCIAL Y SUS APLICACIONES EN CIENCIAS

Una multitud de fenómenos naturales son regidos por un corto número de funciones especiales, por ejemplo en la geología la magnitud de un terremoto, en la astronomía la magnitud de una estrella o planeta, en la física el cálculo de volúmenes etc. Están dados en función de una ecuación logarítmica. El crecimiento poblacional, en la medicina, la química y física entre otras siguen leyes exponenciales y se emplean las funciones exponenciales.

Para comprender mejor estas funciones hemos de remontarnos un poco al pasado.

En el siglo diecisiete, dos fueron las necesidades (relacionadas al movimiento) por lo que nace el concepto de función:

4. **El estudio del movimiento, influidos por los descubrimientos de Kepler y Galileo en relación con los cuerpos celestes.**

Los navegantes Europeos en su búsqueda de materias primas y de nuevas relaciones comerciales, se alejaban cada vez más de las costas de las que partían y esto les ocasionaba grandes dificultades para conocer su posición en alta mar y llegar al lugar deseado.

Necesitaban saber la latitud y la longitud. La primera se conseguía por observación directa del Sol o de las estrellas, pero la segunda ofrecía serias dificultades porque no disponían de los medios adecuados para medir correctamente la dirección del movimiento de la Luna, y cometían numerosos errores.

5. **El interés económico y militar.**

Las trayectorias de los proyectiles, sus alcances y alturas, el efecto de la velocidad de la boca del arma eran asuntos de sumo interés para los gobernantes.

Del estudio de diversos problemas del movimiento se extrajo la conclusión de que era necesario medir el tiempo con mayor precisión, y se llegó a vincular este problema con el movimiento del péndulo, mecanismo básico para la medida del tiempo.

La carencia de instrumentos de medida suficientemente precisos para construir tablas de variables impidió que el estudio de este concepto se abordara antes.

Por ejemplo:

Los griegos, que en otros aspectos tenían un desarrollo matemático admirable, no llegaron a tener una idea del movimiento lo suficientemente elaborada.

De los anteriores estudios, obtuvieron los matemáticos un concepto fundamental, que fue central en casi todo el trabajo de los dos siglos siguientes: *el concepto de función* o de *relación entre variables*.

El concepto de función aparece explícitamente en Leibniz (1692), y es utilizado por los de Bernoulli desde 1694. Euler (1707-1783) introdujo en 1734 el símbolo *f(x)*. En (1854) el concepto general de función queda establecido por Dirichlet como correspondencia arbitraria entre dos variables.

Algunas aplicaciones

1. Las bacterias normalmente se reproducen de la siguiente manera, una célula madre se divide en dos células hijas. Si sembramos una cantidad determinada de la bacteria, observamos que se necesita aproximadamente una hora para que se duplique.

1. **Si comenzamos con una célula (a cero horas) ¿Cuántas células hijas habrán al cabo de 1,2, 3, 4,… horas?**

Como la célula madre se divide en dos células hijas al final de la primera hora, entonces en la segunda hora cada célula hija se dividirán en dos nuevas células hijas. Por lo tanto después de dos horas serán 4 células.

En la tercera hora cada célula nueva se divide en dos células hijas, es decir, 4 por 2, serán 8 células.

Análogamente se puede obtener para la cuarta hora, si tenemos 8 células en la tercera hora, nos quedarais de la siguiente manera 8 por 2. 16 células en la cuarta hora.

Del algebra, la multiplicación de dos o mas factores iguales como, $2*2*2,\ 2*2,\ 1*2,\ 1$, se escriben en forma abreviada como $2^4, 2^3, 2^2, 2^1, 2^0$ respectivamente. El exponente indica el número de veces que la base *a* se toma como factor. Si el numero de veces es *x* el producto será igual a $f(x) = a^x$

Completa la tabla con los datos obtenidos:

Tiempo (horas)	0	1	2	3	4	…	X
Número células	1 $2^0 = 1$	2 $2^1 = 2$	4 $2^2 = 4$	8 $2^3 = 8$	16 $2^4 = 16$	…	2^x

Observa que el tercer renglón de la tabla es resultado de la relación entre el tiempo que es la variable *x* con el número de células *f(x).*

2. Representa la función en forma analítica y gráficamente

Si ubicamos en el eje coordenado los datos de la tabla obtenemos los siguientes puntos, (0,1), (1,2), (2,4), (3,8), (4,16)…

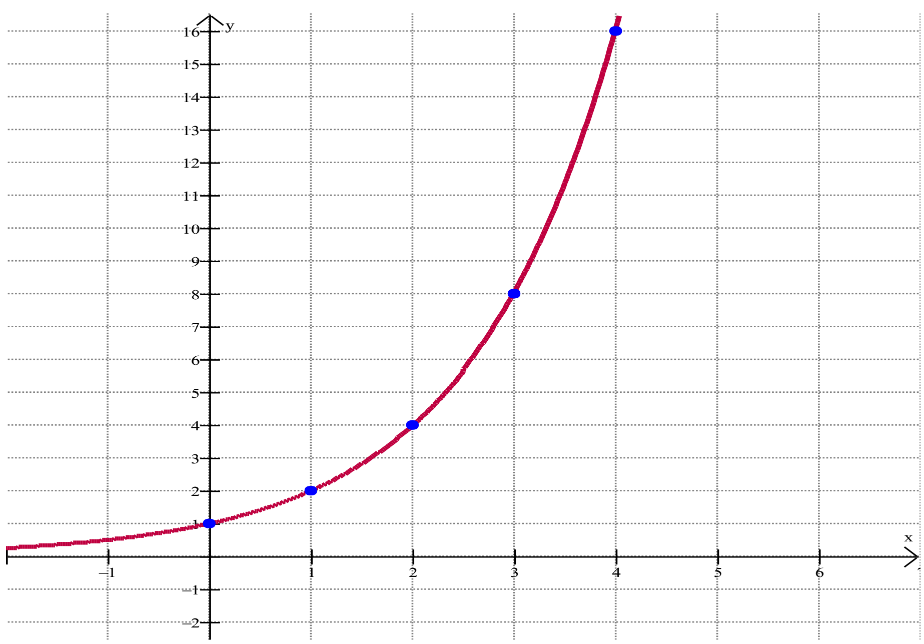


Figura 1. Gráfica de la función $f(x) = 2^x$

1. En Estados Unidos de América las ventas de automóviles deportivos han ido aumentando desde 1992. El número de ventas de cada año $f(t)$, en millones puede calcularse mediante la función $f(t) = 0.98 + 1.97\log(t+1)$ donde $t = 0$ representa a 1992, $t = 1$ representa a 1993 y así sucesivamente si esta tendencia continúa:

6. calcule el número de automóviles deportivos vendidos hasta 1998

año	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
t	0	1	2	3	4	5	6
$f(t)$	.98	1.57302	1.91992	2.16605	2.35697	2.51295	2.64484

7. representa en la forma gráfica

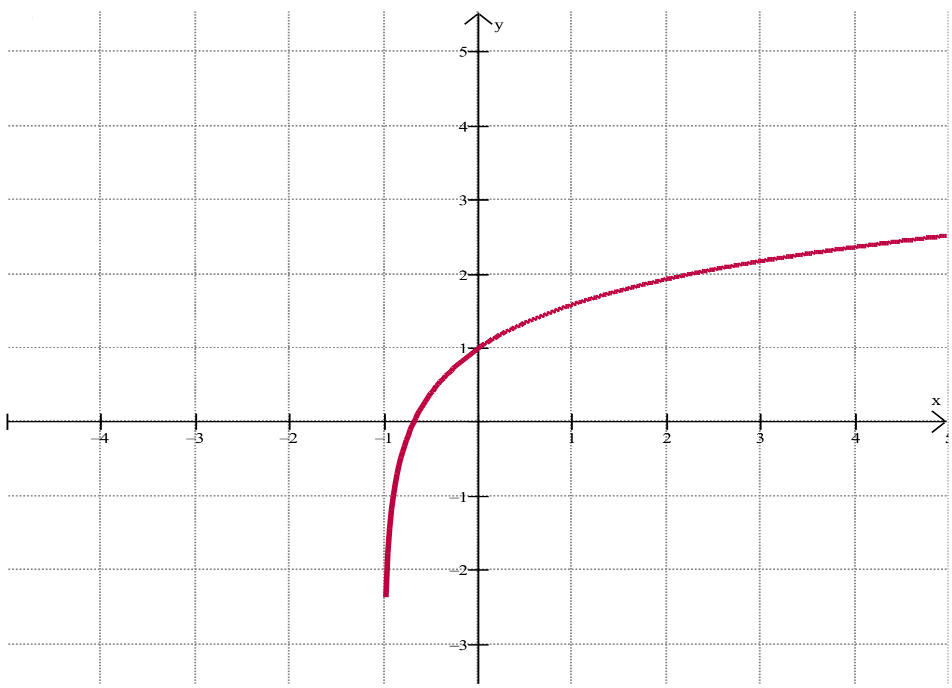


Figura2. Gráfica de la función $f(t) = 0.98 + 1.97\log(t+1)$

LECTURA 2

FUNCIÓN EXPONENCIAL Y SUS PROPIEDADES (ENFOQUES ANALÍTICO, VERBAL Y GRÁFICO)

En la lectura uno hablamos de la historia y aplicación de las funciones exponencial y logarítmica. Vimos en el ejercicio uno como obteníamos una formula a partir de relacionar variables en un problema, esta formula se llama función exponencial.

Definición.

La función exponencial presenta una relación entre las variables x, y mediante expresiones del tipo $y = b^x$ o $f(x) = b^x$.

¿Que pasaría con la función si b = 1 para cualquier valor de x?

¿Que pasaría si tomara cualquier valor negativo cuando $x = \frac{1}{2}$ *?*

Si sustituimos el valor de b = 1 en la función, nos quedaría $y = 1^2$*, esta no es una función exponencial es una función constate (recta horizontal). Para la segunda pregunta si sustituimos en la función b = -4 y* $x = \frac{1}{2}$ *nos quedaría* $y = (-4)^{1/2}$ *(por la ley 8 del formulario)* $y = \sqrt{-4}$ *sabes del aritmética que no existe raíces negativas en los números reales.*

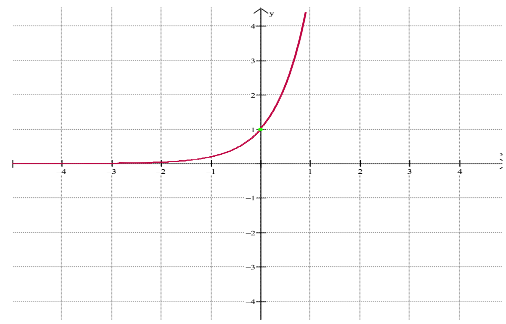
Por lo tanto a esta definición se agrega que el número b será un número real positivo y distinto de la unidad.

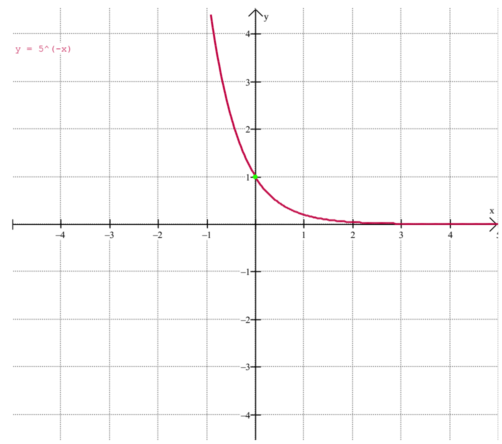
Propiedades

El Dominio (valores que toma *x*), Rango (valore que toma *y*), Carácter de crecimiento (sube o baja la curva) e Intersección con lo eje *y* (corte de la grafica en el eje horizontal), son algunas de las propiedades o características comunes de las funciones exponenciales.

Observa las siguientes graficas, y lee detenidamente

A la derecha en la parte de arriba vemos la función $y = 5^x$, y abajo la función $y = 5^{-x}$ (para resolver este tipo de funciones aplicamos ley 3 del formulario), notemos lo siguiente:





Las funciones están definidas para todo los números reales de *x*, es decir al introducir cualquier numero las función arrojan otro numero real.

Por lo tanto el domino de las funciones son el conjunto de los números reales.

Para todo valor de *x* las funciones toman valores positivos, esto es las funciones $y = 5^x$, $y = 5^{-x}$ nunca podrán representar un número negativo, ni igual a cero.

El rango de las funciones son todos los números positivos reales.

La función $y = 5^x$ es creciente por que a medida que el valor de *x* aumenta, aumenta el de *y*. En cambio la función $y = 5^{-x}$ es decreciente por que el valor disminuye cuando el valor de x aumenta

Las dos curvas cortan al eje *y* en el punto (0,1)

En los siguientes puntos resumimos éstas propiedades para $y = f(x) = b^x$ **.**

4. Dominio es un conjunto de todos los números reales
5. Rango es el conjunto de todos los números positivos
6. La función es creciente cuando *b>1*, y es decreciente cuando *0<b<1*
7. Independiente de la base, la función exponencial $y = b^x$ pasa siempre por el punto (0,1), debido a que cuando *x* vale cero, por la ley 4 del formulario, *y = 1*.

Combinación de funciones

Así como los números pueden ser combinados de diferentes manera (suma, diferencia, producto etc.), las funciones también pueden ser combinadas para formar nuevas funciones, a esto se le llama comúnmente álgebra de funciones o combinación de funciones.

Sean *f* y *g* dos funciones, definimos:

Suma: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

Diferencia: $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

Producto: $(f*g)(x) = f(x)*g(x)$

Cociente: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Cada dominio de *(f+g)*, *(f-g), (f*g),* es la intersección del dominio de *f* con el dominio de *g*. El dominio $\left(\frac{f}{g}\right)$ es la intersección del dominio de *f* con el dominio de *g*, sin los números para los cuales *g(x)* = 0. Recuerda que la división entre cero no es valida.

Considera las funciones *h(x)*= 2^x y *m(x)*= 3^x la suma, diferencia, producto y cociente están dados por:

La suma $(h+m)(x) = 2^x + 3^x$

La diferencia $(h-m)(x) = 2^x - 3^x$

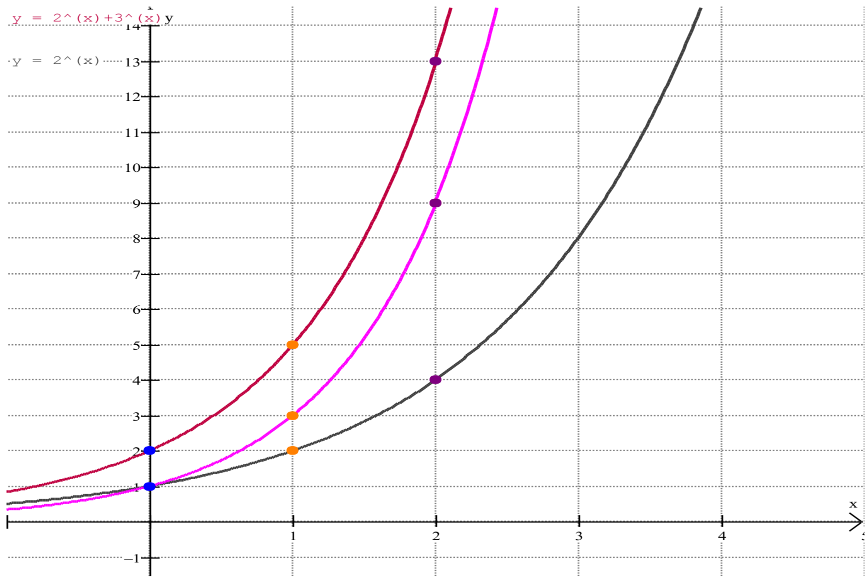
El producto $(h*m)(x) = 2^x * 3^x$

El cociente $\left(\frac{h}{m}\right)(x) = \frac{2^x}{3^x}$

Ejemplo1. Obtener la gráfica de la función suma es un proceso que se lleva a cabo a través de sumar alturas (ordenadas). Es decir el valor de $h(x_1)$ más el valor $m(x_1)$ dará el valor de $(h+m)(x_1)$.

Observa la grafica de abajo. Las curvas de $h(x) = 2^x$, $h(x) = 3^x$ y la suma

$(h+m)(x) = 2^x + 3^x$ son de color gris, verde y rojo respectivamente.



Si sumamos las ordenadas (valores de *y*), en *x* = 0 de la curva, gris y verde, nos da como resultado la ordenada de la curva roja (que es la curva de la suma) esto es

$y_1(0) + y_2(0) = 1 + 1 = 2$ ordenada de curva roja cuando *x* = 0.

Si sumamos las ordenadas (valores de *y*), en *x* = 1 de la curva, gris y verde

$y_1(1) + y_2(1) = 2 + 3 = 5$ ordenada de la curva roja.

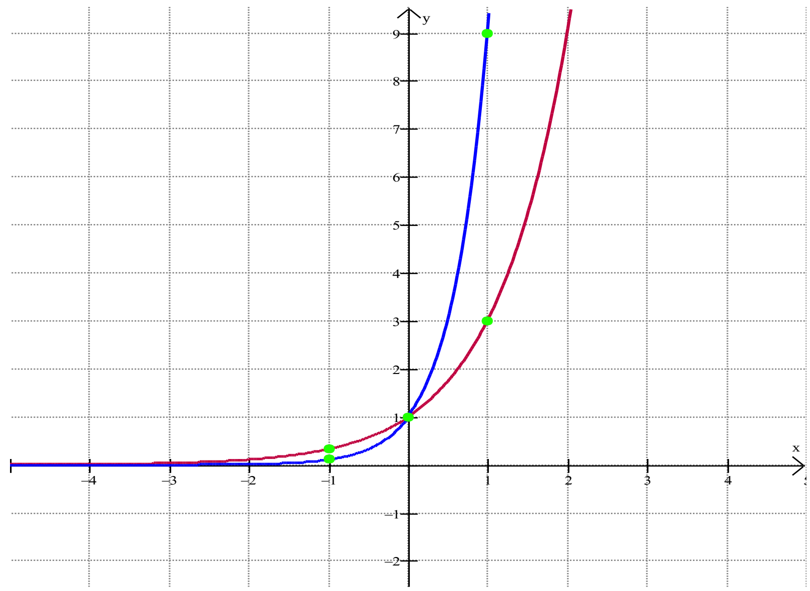
Si sumamos las ordenadas (valores de *y*), en *x* = 2 de la curva, gris y verde

$y_1(2) + y_2(2) = 4 + 9 = 13$ ordenada de la curva roja y así sucesivamente.

De igual forma con las operaciones diferencia, multiplicación y división, la gráfica se obtiene haciendo la operación correspondiente con alturas (ordenadas), tendrás que tener cuidado con la división cuando el denominador sea cero.

Ejemplo 2. Observa las siguientes curvas

a) Determina en forma verbal y la forma analítica



Forma verbal

Tienen la forma de funciones exponenciales. En el primer cuadrante la curva de color azul esta por arriba (crece mas rápido) que la curva color rojo esto significa que la función de la curva color azul tiene una base mayor que la curva roja sin embargo en el segundo cuadrante la curva roja esta por arriba que la curva azul, esto se debe a que en los números negativos las funciones exponenciales, por la ley tres de exponentes (ver formulario), se hacen números fraccionarios y la función que tiene mayor base en los negativos se convierte en la de menor base.

Forma analítica

Si observamos los puntos de la curva roja; (-1, $\frac{1}{3}$), (0,1), (1,3); (2,9), el punto que seguiría seria (3,27)…….. $(x,3^x)$ por lo tanto la función en forma analítica de la curva color roja $y = 3^x$.

En el caso de la curva azul, (-1, $\frac{1}{9}$), (0,1), (1,9); (2,81)…….. $(x,9^x)$ por lo tanto la función en forma analítica de la curva color azul $g = 9^x$.

1. Multiplica geométricamente la función $y = 3^x$ por si misma apóyate con la grafica del inciso *a)*.

$(y * y)(x) = 3^x * 3^x$ Si multiplicas las ordenadas por si mismas de la curva color roja, nos dara como resultado las ordenadas de la curva azul, si utilizamos las leyes de los exponentes obtenemos $m = 3^{2x} = \left(3^2\right)^x = 9^x$

El dominio de ambas funciones son todos los reales, el rango son todos los números positivos, cortan al eje y en (0,1) y son crecientes.

Ejemplo 2

Determina en forma analítica y gráfica, tres funciones con las siguientes condiciones:

$$y_1(-1) * y_2(-1/) = \frac{1}{3} * \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$y_1(0) * y_2(0) \quad = \quad 1 * \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$y_1(1) * y_2(1) \quad = \quad 3 * \frac{1}{3} = 1$$

$$y_1(2) * y_2(2) \quad = \quad 9 * \frac{1}{3} = 3$$

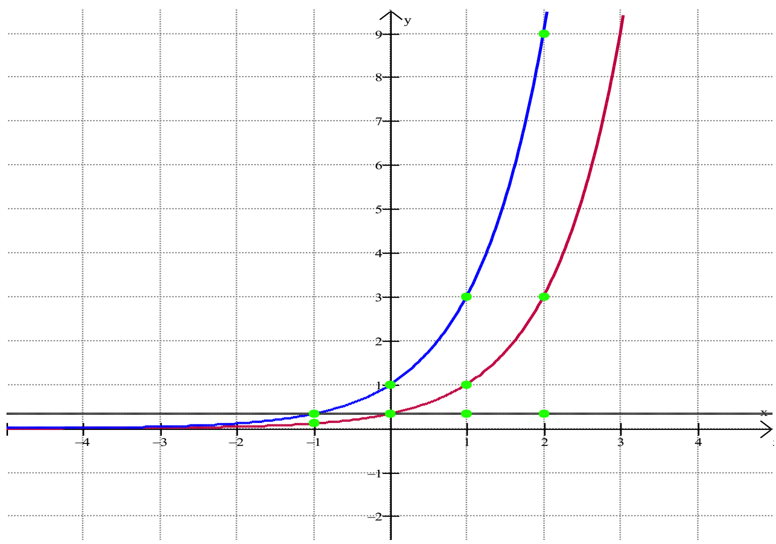
De las cuales una de las funciones es constante, las otras dos restantes en el segundo y primer cuadrante tienen la misma posición es decir, en todo el recorrido una de ellas queda arriba de la otra, mientras que la función constante en el segundo cuadrante esta por arriba de las otras dos y en el primer cuadrante esta por debajo.

Forma analítica

Si observamos las multiplicación de funciones la primera función para valores de *x* = -1, 0, 1, 2, tenemos los valores $\frac{1}{3}, 1, 3, 9,$ siguiendo la secuencia seguiría 27, 81 o sea

y $= 3^x$, si seguimos con la segunda función para los mismos valores de x tendremos $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$, o sea $z = \frac{1}{3}$ (función constante). La tercera función, la podemos resolver de la misma manera o por la combinación de funciones esto es $k = 3^x * \frac{1}{3}$, utilizando las leyes de los exponentes tenemos k = $3^x * 3^{-1}$ = 3^{x-1}

Forma gráfica



LECTURA 3

TRADUCCIÓN ENTRE LAS REPRESENTACIONES ANALÍTICAS, GRÁFICAS Y VERBAL DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL Y SUS PROPIEDADES

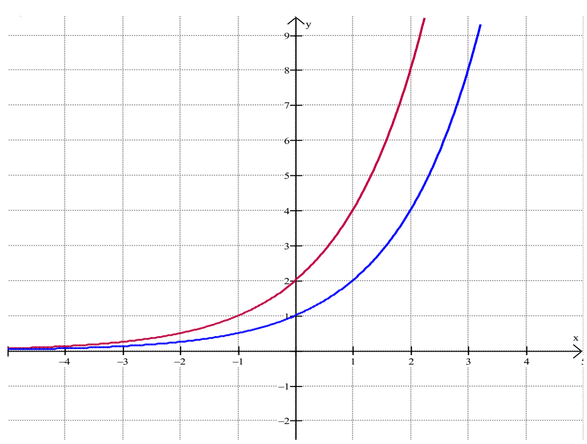
En la lectura 2 establecimos la definición de la función exponencial, sus propiedades y algunas combinaciones de esta, vimos tres representaciones de la función; en forma analítica, verbal y grafica, en esta lectura resolveremos ejercicios de análisis es decir la traducción entre dichas representaciones.

Ejemplos

4. Si $y = 3^{ax}$, *y* (0) = 1, *y* (1) = 1/3, *y* (2) = 1/9, *y* (3) = 1/27, ¿cuanto vale a?

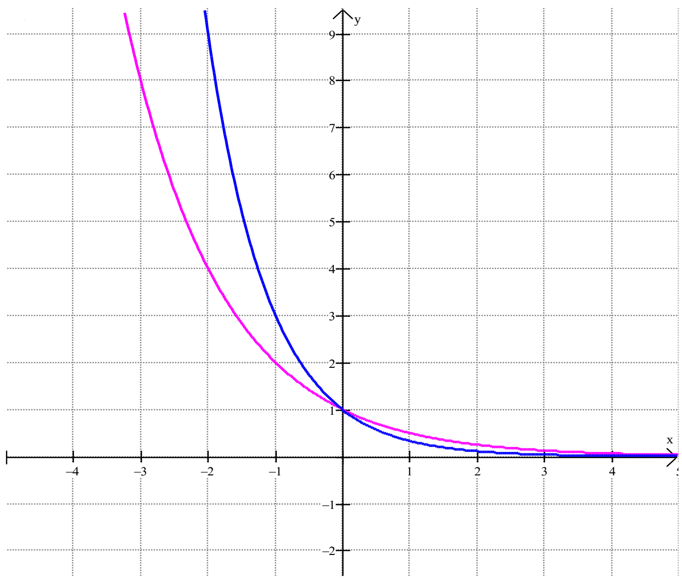
Los puntos son (0,1) $\left(1, \frac{1}{3}\right)$ $\left(2, \frac{1}{9}\right)$ $\left(3, \frac{1}{27}\right)$ estos puntos también los podemos representar como $\left(0, \frac{1}{3^0}\right)$ $\left(1, \frac{1}{3^1}\right)$ $\left(2, \frac{1}{3^2}\right)$ $\left(3, \frac{1}{3^3}\right)$.............$\left(x, \frac{1}{3^x}\right)$ por las leyes de los exponentes $\left(\frac{1}{3^x}\right) = 3^{-x}$ por lo tanto *a* = -1

5. Grafica y relaciona las siguientes funciones $y = 2^x, m = 2^{x+1}$



Por las leyes de los exponentes la función $m = 2^{x+1}$ se puede decomponer en $m = 2^{x} * 2^{1}$ la relación que guarda con $y = 2^{x}$ es la multiplicación de la constante 2, si observas la grafica de $y = 2^{x}$ (color azul), y multiplicas las ordenadas por dos te dará una serie de punto que forman la curva $m = 2^{x+1}$ (color roja)

6. dadas las curvas ¿Cuál de ella tiene una base mas pequeña?



La curva azul es la que tiene menor base. Para valores positivos de *x* esta función se hace mas pequeña que la rosa en los valores negativos de *x* pasa lo contrario pero esta situación de da por que las funciones son de base fraccionaria (si observas su forma) y se invierte por lo tanto en los negativos de *x*, la función se hace entera.

LECTURA 4

FUNCIÓN LOGARITMICA Y SUS PROPIEDADES (ENFOQUES ANALÍTICO, VERBAL Y GRÁFICO).

Sean $f(x) = 2^x$ y $g(x) = ?$

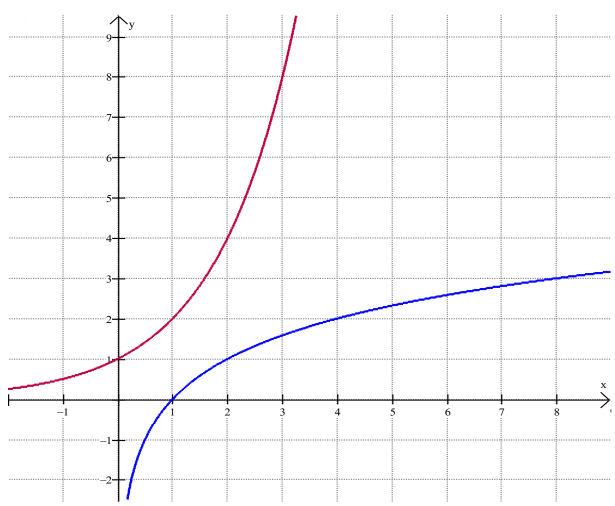
Si construimos las tablas y sus respectivas graficas de cada una (para determinar los valores en la tabla de *g(x)*, el dominio de *f(x)* será el rango de *g(x)*, y el rango de *f(x)*

será el dominio de *f(x).*

x	-1	0	1	2	3
f(x)	1/2	1	2	4	8

Intercambiando los renglones

x	1/2	1	2	4	8
g(X)	-1	0	1	2	3



A una función tal como *g(x)* (curva verde) la llamaremos función logarítmica de base"2" asociada la función exponencial *f(x)* (curva roja) de la misma base. La función logaritmo es la función inversa de la exponencial, que existe en base a lo demostrado anteriormente.

Definición

La ecuación $y = \log_b x$ define una función logarítmica con base *b*. al igual que la función exponencial x es un numero positivo y diferente de cero. ($y = \log_b x$ equivale a $x = b^y$ por ser funciones inversas).

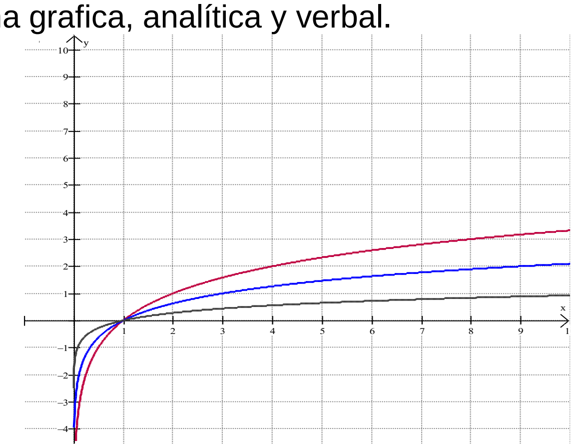
Si observamos la grafica de *g(x)* (curva verde) y recordamos las propiedades de la función exponencial podremos determinar las propiedades de la función logarítmica.

Propiedades para $y = \log_b x$**.**

8. Dominio es el conjunto de todos los números positivos
9. Rango es un conjunto de todos los números reales
10. La función es creciente cuando *b>1*, y es decreciente cuando *0<b<1*
11. Independiente de la base, la función logarítmica $y = \log_b x$ pasa siempre por el punto (1,0).

Las funciones que se estudiaran serán las de base 10

Ejemplo 1. Sean las funciones $y = \log_2 x\,(\text{color rojo}),\quad y = \log_3 x(\text{color azul}),\ y = \log_{12} x(\text{color verde})$ determina las propiedades en forma grafica, analítica y verbal.



El Dominio de las funciones son los valores que toma *x,* y solamente toma valores positivos. $D = (0, \infty)$

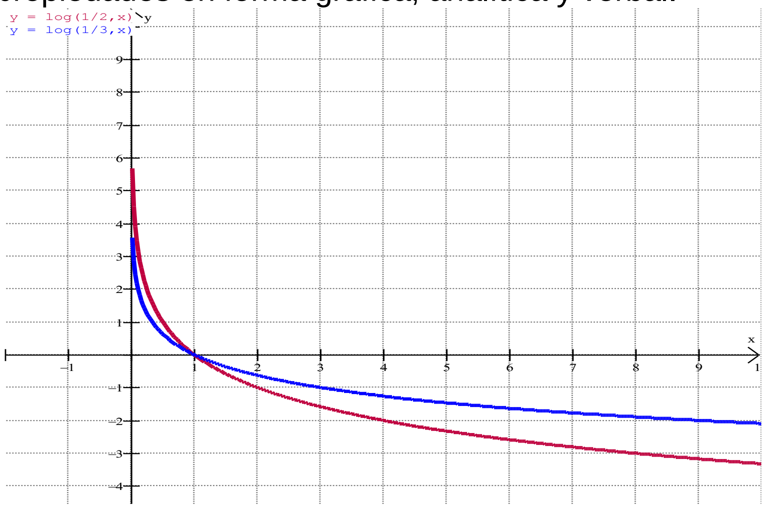
El rango son los valores que puede tomar *y,* o sea el resultado de un logaritmo. $R = (-\infty, \infty)$.

Todas las funciones pasan por el punto (1,0), esto es, $\log_b 1 = 0 \Leftrightarrow b^0 = 1$

Las funciones son crecientes.

Las funciones son positiva (por arriba del eje *x*), para valores de *x* mayores que la unidad. La función será negativa (por abajo del eje *y*), para valores de *x* menores que la unidad.

Ejemplo 2. Sean las funciones $y = \log_{\frac{1}{2}} x \text{(color rojo)}$, $\mathrm{y} = \log_{\frac{1}{3}} x\text{(color azul)}$, determina las propiedades en forma grafica, analítica y verbal.



El dominio de las funciones es cualquier valor positivo. $D = (0, \infty)$.

El rango son todos los valores reales. $D = (0, \infty)$.

Todas las funciones pasan por el punto (1,0).

Las funciones son decrecientes.

La funciones son positivas para valores de *x* comprendidos entre 0 y1, las funciones son

Negativas para valores de *x* mayores de 1.

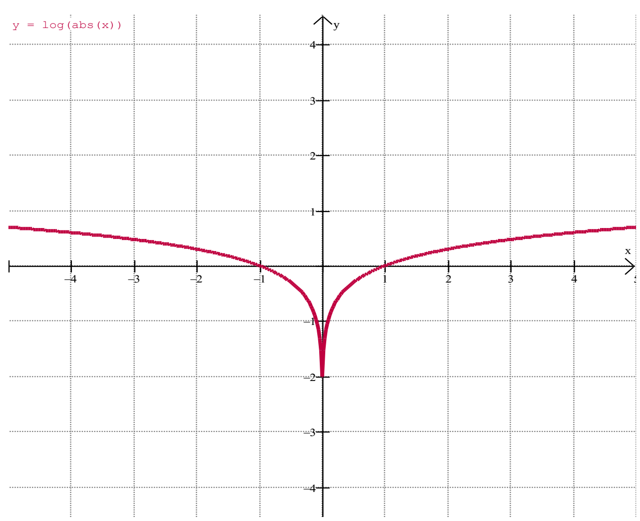
LECTURA 5

TRADUCCIÓN ENTRE LAS REPRESENTACIONES ANALÍTICA, GRÁFICA Y VERBAL DE LA FUNCIÓN LOGARITMICA Y SUS PROPIEDADES.

En la lectura 4 establecimos la definición de la función logarítmica, y sus propiedades, vimos tres representaciones de la función; en forma analítica, verbal y gráfica, en esta lectura resolveremos ejercicios de análisis, es decir la traducción entre dichas representaciones.

Ejemplo 1 determina el dominio de la función $y = \log_{10}|x|$, comprueba graficando.

Por la definición de función logaritmo vista en la lectura 4, dice la ecuación $y = \log_b x$ define una función logarítmica con base *b*. donde *x* es un numero positivo y diferente de cero. En este caso si *x* toma valores negativos por el valor absoluto se transforma en valores positivos, por lo tanto el dominio son todos los números reales menos el cero.



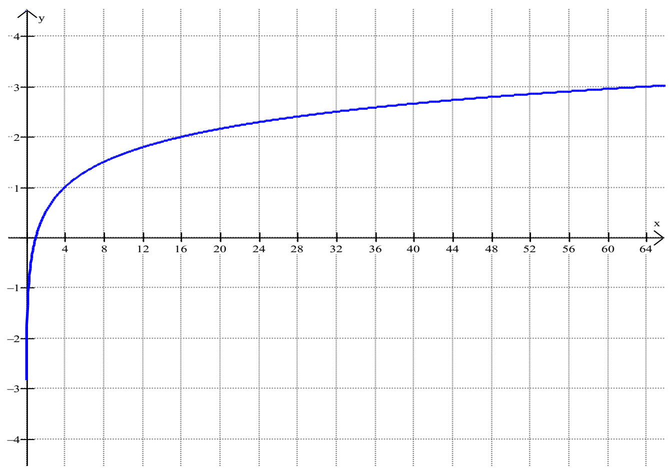
Ejemplo 2

La gráfica de una función logarítmica pasa por el punto (243, 5). ¿Determina la base de la función?

Tomando el punto (243, 5), la ordenada la podemos representar 3^5, el punto quedaría ($3^5, 5$) si este punto lo expresamos como (3^5, *x*), si lo representamos en forma exponencial 3^5 = x pasando a la forma logarítmica $y = \log_3 x$.

Ejemplo 3

Observa la grafica.



Determina en forma analítica la ecuación de la función.

Si determinamos algunos puntos de la grafica (4,1), (16,2), (64,3), estos punto pasando la forma exponencial $(4^1,1),(4^2,2),(4^3,3)$ continuarían los puntos $(4^4,4),(4^5,5)$ si recordamos las propiedades de las funciones logarítmicas (lectura 4) que dice el domino de la función logaritmo es el rango de la exponencial y el rango de la función logarítmica es el dominio de la exponencial por tanto si cambiamos en lo puntos la ordenas por las abscisas tendremos $(1,4^1),(2,4^2),(3,4^3),(4,4^4),(5,4^5)$ estos puntos pertenecen a la función exponencial $y = 4^x$. Si utilizamos la definición de la función logarítmica la función analítica pedida es $y = \log_4 x$

LECTURA6

SOLUCIÓN ANALÍTICA DE ECUACIONES LOGARÍTMICAS Y EXPONENCIALES

Ecuaciones exponenciales.

Cuando nos enfrentamos a ecuaciones, donde la incógnita aparece en el exponente de una potencia, tendremos una ecuación exponencial.

Para resolverlas tendremos varias herramientas, todas ellas basadas en las leyes de los exponentes, además de estas leyes se aplica la relación:

Si $b^{x_1} = b^{x_2}$ entonces $x_1 = x_2$ .... (1)

La relación nos dice que cuando tengamos dos cantidades con la misma base podemos igualar los exponentes

Ejemplos:

Resuelve analíticamente las siguientes ecuaciones

1. $2^x = 16$ por las leyes de los exponentes $2^x = 2^4$ utilizando (1), x = 4.

2. $\frac{1}{3^{x-1}} = 81$ utilizando leyes de los exponentes $\left(3^{x-1}\right)^{-1} = 81$ haciendo los dos lados de la misma base $\left(3^{x-1}\right)^{-1} = 3^4$ igualando exponentes $-x+1 = 4;$ x = -3

3. $2^{x-1} + 2^x + 2^{2+1} = 7$
   En este tipo de ejercicios la estrategia es factorizar como termino común el numero dos (base), para ello utilizamos las leyes de los exponentes

   $2^x * 2^{-1} + 2^x + 2^x * 2^1 = 7$ factorizando por termino común $2^x(2^{-1} + 1 + 2) = 7;$

$$2^x\left(\frac{1}{2}+1+2\right)=7 \quad \Rightarrow \quad 2^x\left(\frac{7}{2}\right)=7 \quad \Rightarrow \quad 2^x=7\left(\frac{2}{7}\right)$$

$$2^x=2 \Rightarrow x=1$$

Puede ocurrir que al convertir una ecuación exponencial en algebraica, tengamos que realizar un cambio de variable, encontrándonos con una ecuación de 2º grado, que una vez solucionada nos lleve, deshaciendo el cambio de variable a la solución de la ecuación exponencial.

Ejemplo:

4. $4^x-3*2^{x+1}+8=0$ descomponiendo en ecuación de segundo grado

$$\left(2^2\right)^x-3*2^x*2^1+8=0 \quad \Rightarrow \quad \left(2^2\right)^x-6*2^x+8=0$$

haciendo cambio de variable $\quad 2^x=t \quad \Rightarrow \quad t^2-6*t+8=0$

resolviendo la ecuación de segundo grado

$$(t-4)(t-2)=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix}(t-4)=0; t=4 \\ (t-2)=0; t=2\end{matrix}$$ Haciendo el cambio de variable

$$\begin{matrix}2^x=t & & \\ 2^x=4; & 2^x=2^2 & x=2 \\ 2^x=2 & & x=1\end{matrix}$$

Un ejemplo especial:

5. $2^{x+2}=9$ Ante la imposibilidad de expresar el 9 como potencia de base 2, la ecuación planteada no se podrá resolver a menos que trabajemos utilizando logaritmos.

Aplicando logaritmos a ambos lado de la ecuación $\log 2^{x+2} = \log 9$ por la propiedad del exponte en los logaritmos. $(x+2)\log 2 = \log 9$ despejando *x*

$$x = \frac{\log 9}{\log 2} - 2\,; \quad x = 1.169925001$$

Ecuaciones logarítmicas.

Una ecuación logarítmica es aquella en la cual la incógnita se vea afectada por la operación logarítmica. La resolución de estas ecuaciones es la misma que para resolver ecuaciones exponenciales, esto es, convertir la ecuación logarítmica en algebraica, de manera que la búsqueda de la solución es casi inmediata.

Las herramientas utilizadas para ello serán las propiedades de los logaritmos, y la relación logarítmica:

$$\log x_1 = \log x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ .... (2)}$$

Una vez que obtengamos la ecuación algebraica que debemos resolver, tendremos que comprobar las soluciones obtenidas, para ver si son válidas dentro de la expresión logarítmica con la cual estamos trabajando, debido a que pueden aparecer soluciones extrañas, que no se podrán aceptar como solución de nuestra ecuación logarítmica.

La forma de resolverlas es la misma cualquiera que sea la base del logaritmo, por lo que en este tema vamos a simbolizar los logaritmos como **log**. Entendiendo que la base es diez, mientras no digamos lo contrario

Ejemplos:

Resuelve analíticamente las siguientes ecuaciones

1. $\log(x+6) = \log(2x-1)$ **aplicando la relación (2),** $x+6 = 2x-1$ resolviendo la ecuación algebraica x = 7

2. $3\log x - \log 32 = \log \frac{x}{2}$ aplicando las propiedades de los logaritmos al primer miembro de la ecuación (potencia y resta) nos quedará:

$\log x^3 - \log 32 = \log \frac{x}{2} \Rightarrow \log \frac{x^3}{32} = \log \frac{x}{2}$ aplicando la relación **(2)**

$$\frac{x^3}{32} = \frac{x}{2} \Rightarrow 2x^3 - 32x = 0 \quad \text{resolviend o la ecuacion cubica} \quad 2x(x^2 - 16) = 0$$

2x = 0 ; $(x^2 - 16) = 0$; x = 0 ; (x-4) (x+4) = 0; x = 4; x = - 4

De las tres soluciones de la ecuación algebraica, dos de las soluciones x = 0,

x = -4 se consideran soluciones extrañas, no validas para nuestra ecuación logarítmica de partida ya que al sustituir, x por cero y menos cuatro es imposible calcular los logaritmos de números negativos o cero, con lo que la única solución aceptada es x = 4

3. $2\log x = 3 + \log \frac{x}{10}$ aplicando propiedades de los logaritmos tendremos

$\log x^2 = \log 10^3 + \log \frac{x}{10}$ (recuerda que $3 = \log 10^3$)

aplicando la propiedad de la multiplicación para los logaritmos en el segundo miembro de la ecuación.

$\log x^2 = \log 10^3 * \log \frac{x}{10}$ utilizando la relación **(2)**

$$x^2 = \frac{10^3 x}{10} \quad \Rightarrow \quad x^2 = 100x \quad \Rightarrow \quad x^2 - 100x = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado

$x(x - 100) = 0$; x = 0 y x = 100

x = 0 solución extraña, x = 100 es la solución.

LECTURA 7

SOLUCIÓN GRAFICA DE ECUACIONES LOGARÍTMICAS Y EXPONENCIALES

Solución Grafica de ecuaciones exponenciales.

En cursos anteriores has resuelto de manera grafica las ecuaciones de una variable. Las ecuaciones logarítmicas y exponenciales también pueden resolverse de forma grafica; para hacerlo debes de encontrar un valor de "x" que cumpla la igualdad (es como en cualquier ecuación). En casos sencillos, eso se puede lograr por simple observación.

Tomaremos algunos ejemplos de la lectura ocho:

Resuelve geométricamente las ecuaciones exponenciales

4. $2^x = 16$ ***(ejemplo 1, lectura 6)***

Se descompone la ecuación en dos funciones y = 2^x; y = 16, en un mismo eje coordenado se introduce las funciones a winplot.

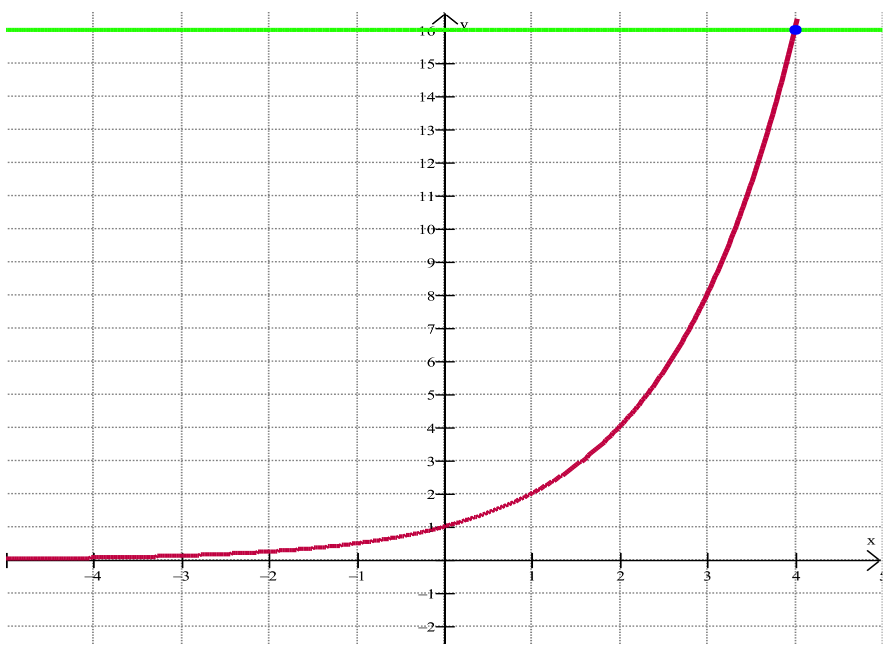


Figura 9.1. Solución grafica de la ecuación $2^x = 16$

La solución geométrica es la coordenada de x en el punto de intersección de las dos graficas. x = 4

12. $4^{x}-3*2^{x+1}+8=0$ ***(ejemplo 4, lectura 6)***

Para esta ecuación las ecuaciones son $y=4^{x}-3*2^{x+1}+8$; $y=0$

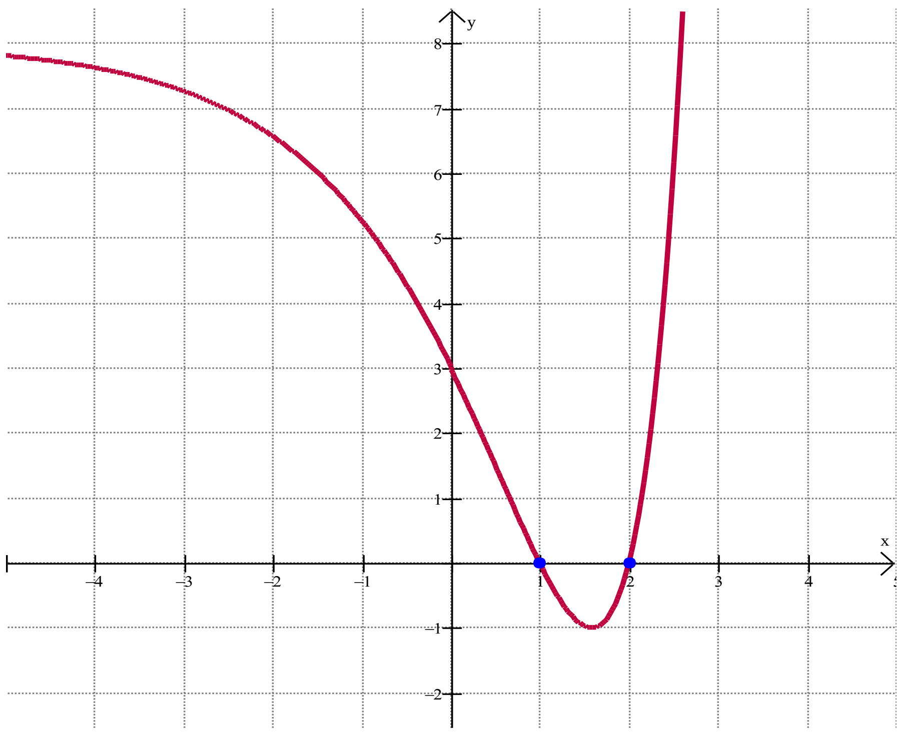


Figura 9.3. Solución grafica de la ecuación $y=4^{x}-3*2^{x+1}+8$

Observa la curva corta al eje *x* en *x* = 1 y *x* = 2, esto pasa porque es una ecuación exponencial de segundo grado.

Graficas de ecuaciones logarítmicas.

Tomando algunos ejercicios de la lectura ocho

Resuelve geométricamente las ecuaciones logarítmicas

13. $\log(x+6)=\log(2x-1)$. ***(Ejemplo 6 lectura 6)***

Al igual que las ecuaciones exponenciales para resolver este tipo de ecuaciones se descompone la ecuación en dos funciones solo que una de ellas es la ecuación completa igualada a cero y despejada; $y = \log(x+6) - \log(2x-1)$ **la otra función es la ecuación algebraica que resulta de aplicar la** relación (2) **igualada a cero y despejada** $x+6 = 2x-1$; **la función nos queda como** $y = x+6-2x+1; \quad y = -x+7$.

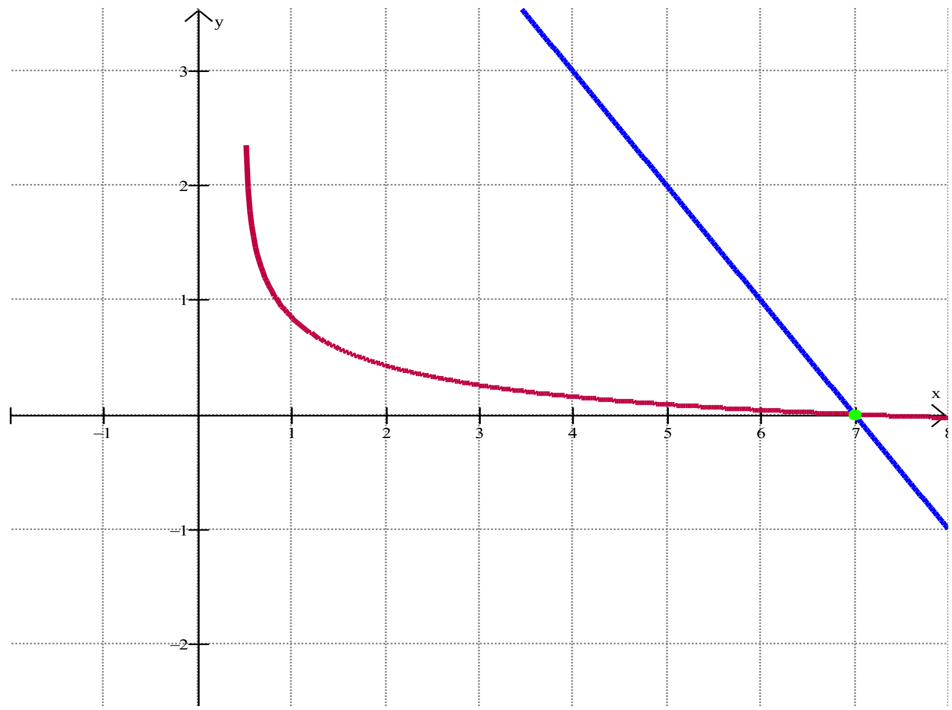


Figura 9.4. Solución grafica de la ecuación. $\log(x+6) = \log(2x-1)$

La solución geométrica es la coordenada de *x* en el punto corte e intersección de las dos graficas. *x* = 7

Nota: Cuando igualarles a cero las ecuaciones debes de tener cuidado al despejar. La forma correcta es 0 =....primer miembro....

14. $3\log x - \log 32 = \log \frac{x}{2}$ ***(Ejemplo 7 lectura 6)***

La primera ecuación del problema es $y = 3\log x - \log 32 - \log \frac{x}{2}$ aplicando propiedades y relación (2), **la segunda ecuación es** $y = x^3 - 16x$

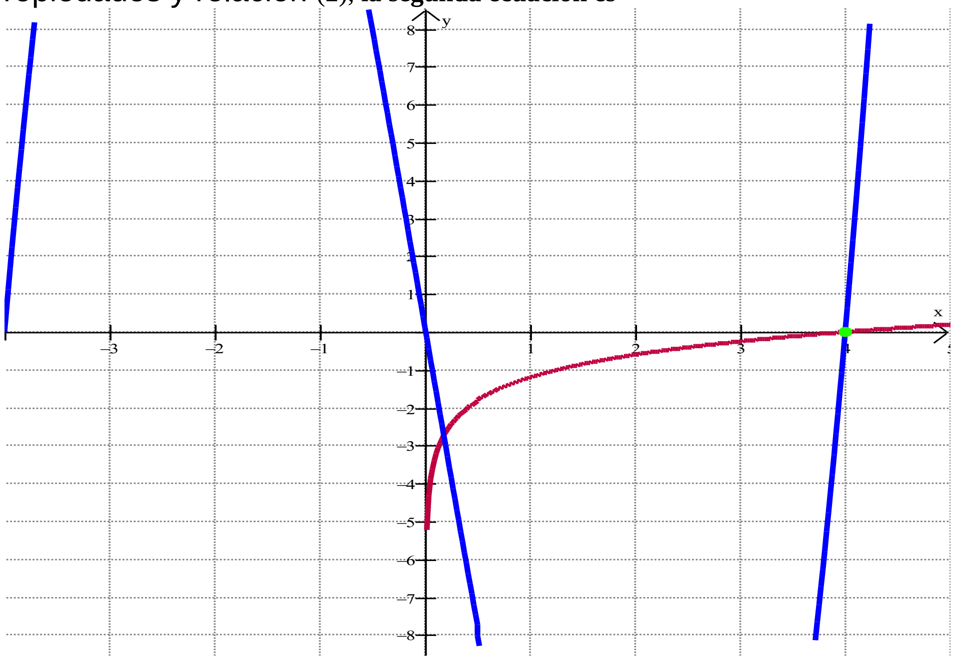


Figura 9.6 Solución grafica de la ecuación $3\log x - \log 32 = \log \frac{x}{2}$

Bibliografía

Anderson, J. R., Reder, L. M. y Simon, H. A. (2001). Educación: el constructivismo radical y la psicología cognitiva. *Estudios Públicos*, 81, 89-128. Recuperado el 27 de mayo, 2004 de www.cepchile.cl/dms/archivo_1805_882/rev81_anderson.pdf

Berenson, M. L. y Levine, D. M. (1996). *Estadística Básica en Administración: conceptos y aplicaciones*. (6ª. ed.). México: Prentice Hall Hispanoamericana.

Coll, C. (2003). La teoría genética y los procesos de construcción del conocimiento en el aula. En: *Piaget en la educación*. México: Paidós.

De la Rosa, A. (2001). *La calculadora y los sistemas semióticos de representación*. Revista Electrónica de Didáctica de las Matemáticas Xixim, Año 2, No. 1, julio 2001.

Duval, R. (2002). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. En: F. Hitt (ed.), *Representations and Mathematics Visualization* (pp. 311-335). México: Cinvestav-IPN.

Duval, R. (1998). *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento.* En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en matemática Educativa II* (pp. 173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval, R. (1997) *Investigaciones en Matemática Educativa II.* Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. Grupo Editorial Iberoamericano. México.

Duval, R. (1992). Gráficas y ecuaciones: la articulación de dos registros. En R. Cambray, E. Sánchez y G. Zubieta (Eds.), *Antología en Educación Matemática* (pp. 125-139). México: SME-CINVESTAV-IPN.

Ernest, P. (1994). Variedades de constructivismo: sus metáforas, epistemologías e implicaciones pedagógicas. *Hiroshima Journal of mathematics education*. 2, 1-14. Traducción de Juan D. Godino. Recuperado el 27 de mayo, 2004 de

www.ugr.es/~seiem/Documentos/Ernest_Constructivismo.doc

Fennell, F. & Rowan, T. (2001). Representation: an important process for teaching and learning mathematics. *Teaching Children Mathematics*, 7 (5), 288-292. Recuperado el 1 de abril de 2004, de la base de datos Wilson Web.

Hitt, F. (1998) Visualización matemática. Representaciones, nuevas tecnologías y currículum. *Educación Matemática*, 10 (2), 23-45. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Hitt, F. (2002). *Funciones en contexto*. México: Prentice Hall.

Hitt, F. (2003). Una reflexión sobre la construcción de conceptos matemáticos en ambientes con tecnología. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*. 10 (2) 213-223.

Holmes, S. (2004). What does it say to you. *Mathematics teaching*, 186, 14-17. Recuperado el 7 de mayo de 2004, de la base de datos Wilson Web.

Kaput, J. (1998). Representations, inscriptions, descriptions and learning: A Kaleidoscope of Windows. *Journal of mathematical behavior*, 17 (2) , 266-281.

Lowrie, T. & Russell, K. (2001). Relationship between visual and nonvisual solution methods and difficulty in elementary mathematics. *The journal of educational research*, 94 (4) 248-255. Recuperado el 1 de abril de 2004, de la base de datos Wilson Web.

Lupiáñez, J.L. y Moreno, L.E, (2001). Tecnología y representaciones semióticas en el aprendizaje de las matemáticas. En: P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática homenaje al profesor Mauricio Castro* (291-300). España: Editorial Universidad de Granada. Recuperado el 11 de julio, 2004 de http://www.uv.es/Angel.Gutierrez/archivos1/doctorado/Homenaje/20LupiannezJL.PDF

Pape, S. & Tchoshanov, M. A. (2001). The role of representation(s) in developing mathematical understanding. *Theory into practice*, 4 (2), 118-127. Recuperado el 1 de abril de 2004, de la base de datos Wilson Web.

Pluvinage, F. (1998). Los objetos matemáticos en la adquisición del razonamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en matemática Educativa II* (pp. 1-15). México: Grupo Editorial Iberoamérica

Pozo, J. I. (1999). *Teorías cognitivas del aprendizaje*. Sexta edición. España: Ediciones Morata.

Preston, R. V. y Garner, A. S. (2003). Representation as a vehicle for solving and communicating. *Teaching in the middle school*, 9 (1), 38-43.

Rico, L. (2000). *Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática*. Recuperado el 28 de Agosto de 2003, de http://www.ugr.es/~seiem/Actas/Huelva/LRico.htm

Sandoval, C.I. y Díaz Barriga, A.E. (2002). Ecuaciones diferenciales de 1er orden una perspectiva didáctica con geometría dinámica. *Memorias de la XII semana regional de investigación y docencia en matemática*. Universidad de Sonora. pp. 189-196

Santrock, J. W. (2002). *Psicología de la educación*. Méxco: McGraw-Hill.

Sierra, G. (2000) *Hacia una explicación sistemática de los fenómenos didácticos. El caso de las convenciones didácticas en el tratamiento de los exponentes no naturales*. México: CINVESTAV.

¿Qué es la investigación en ciencias básicas e ingenierías?

Mario Guerrero Rodríguez

La concepción de la investigación en ciencias básicas e ingenierías es un tanto diferente de la interpretación que se tiene en otras ramas del saber. Puesto que mientras en las ciencias básicas e ingenierías se está pensando en un tipo de investigación de corte empírico-analítico, en otros campos de la ciencia, la investigación es del tipo de investigación-acción o etnográfica. Algo que también hace diferente a la investigación en ciencias básicas e ingenierías es la presencia de hipótesis, las cuales tienen que ser contrastadas por alguna de las técnicas estadísticas presentes en la estadística inferencial.

Independientemente del tipo de investigación, una investigación necesita de una selección clara del tema a analizar, que corresponde al objeto de estudio, de un buen planteamiento del problema, es decir, describir lo que se desea resolver, incluyendo las razones que se tiene para hacerlo, los beneficios que se pueden esperar, el trasfondo filosófico del trabajo, las limitaciones y delimitaciones con que se aborda (CIMAT, 2015), y de la definición del método científico a emplear en dicha investigación (Pérez, 2014). También, es importante para el investigador el uso de técnicas e instrumentos que le faciliten la ejecución de su estudio.

Las técnicas son los recursos o procedimientos que permiten al investigador accesar al objeto o sujeto de la investigación; el instrumento es la herramienta que emplea el investigador para recolectar, registrar y procesar la información.

Algo importante en los instrumentos de medición y recolección de la información, es el grado de confiabilidad que deben de poseer, es decir, que presenten consistencia, coherencia o estabilidad de los datos. Además, que tengan validez, o sea, que el instrumento mida lo que tenga que medir, que sus datos sean ciertos y precisos, asimismo, que tengan cierto grado de sensibilidad y especificidad.

Dependiendo del proyecto de investigación se puede tener una diversidad de tipos de instrumentos. Lo que hace que su selección o construcción se vuelva un tanto complicado, sin embargo, es posible tener lineamientos generales para su posible selección o construcción, tales como: (Quezada, 2010)

1. Lista de variables a medir u observar.
2. Poseer la definición conceptual de las variables y comprender su significado.
3. Cómo las variables han sido definidas operacionalmente, o sea, cada variable como ha sido medida.
4. Tener un número suficiente de preguntas para la medición de las variables.

Los instrumentos de recolección de datos (Hernández, 2006) se clasifican en dos grupos: (a) instrumentos cualitativos e (b) instrumentos cuantitativos.

Los instrumentos cualitativos son empleados en investigaciones cualitativas. Son flexibles y dinámicas, se adaptan a diversos contextos, tienen la facilidad de ser útiles en problemas poco estudiados o de difícil acceso por ser temas íntimos o complicados. Entre los principales instrumentos se tienen: la observación, la entrevista, la revisión documental, los grupos focales, y las técnicas proyectivas. (Villanueva, 2011)

Los instrumentos cuantitativos se emplean en investigaciones descriptivas, correlacionales y explicativas. Los instrumentos son estructurados, se adaptan a diversos análisis estadísticos y describen y miden con precisión diversas variables. Los principales instrumentos cuantitativos son: cuestionario, las escalas, test, pruebas estandarizadas, observación estructurada , y experimentales.

Entonces, los instrumentos de investigación a emplear en el campo de la investigación de la ciencia básica e ingeniería, corresponden a los instrumentos cuantitativos, aunque esto no quiere decir que en un momento dado, en lo particular, no sea necesario hacer uso de instrumentos cualitativos, todo va a depender del tipo de investigación que demande la necesidad de resolver algún problema.

A continuación, se presenta un esquema sobre un diseño de investigación experimental: (Castaño y Domínguez, 2010)

Preexperimentales	- Diseños de caso único. - Diseños de un grupo con medición antes y después. - Diseños de comparación con grupos estáticos.
Cuasiexperimentales	- Diseños de un grupo con medición antes y después. - Diseños con grupo de comparación equivalente. - Diseños con series de tiempo interrumpido.
Experimentales verdaderos	- Diseños con medición previa y posterior con un grupo de control. - Diseños de Sólomon para cuatro grupos. - Diseños con medición previa y grupo de control. - Diseños de series cronológicas. - Diseños factoriales.

Referencias

Castaño, T. E. y J. Domínguez (2010). *Diseños de experimentos: Estrategias y análisis en ciencia y tecnología.* México: Universidad Autónoma de Querétaro/CIMAT.

CIMAT (2015). *Guía para elaborar y estructurar la tesis: métodos estadísticos.* Aguascalientes, Ags., notas de difusión interna.

Hernández, S. R. (2006). *Metodología de la investigación.* México: McGraw Hill.

Pérez, T. R. (2014). *¿Existe el método científico? Historia y realidad.* México: FCE.

Quezada, L. N. (2010). *Metodología de la investigación: estadística aplicada en la investigación.* Perú: Empresa Editora MACRO.

Villanueva, B. L. A. (2011). *Diseño del proyecto e informe de investigación*. Perú: UNIVERSIDAD NACIONAL “SANTIAGO ANTUNEZ DE MAYOLO”.

Instrumentos de investigación

Mario Guerrero Rodríguez

Los instrumentos de investigación en el campo de las ciencias básicas e ingenierías son bastante heterogéneos, pues van a depender de la disciplina en la que esté inmerso un proyecto de investigación. Es decir, que los instrumentos que se requieren para recabar información, no serán del mismo tipo para campos disciplinares como la física, la química, la biología, la matemática o el campo de la ingeniería. Aunque en todas se puede hablar de espacios como laboratorios en los que se desea hacer mediciones o determinaciones a través del instrumental adecuado.

Cabe hacer mención que instrumentos de laboratorio es un término genérico, referido a todos los medidores, recipientes y herramientas diversas que se pueden emplear para síntesis y análisis en el ámbito de la variedad de trabajos de laboratorio.

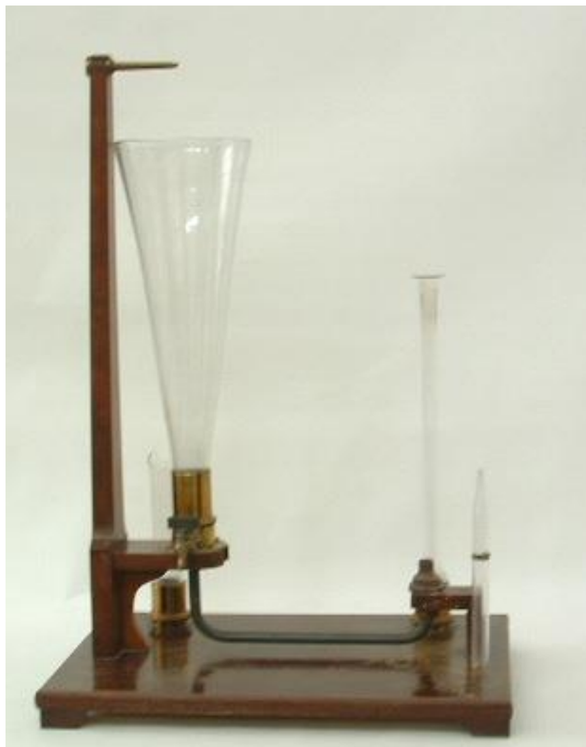
En el campo de la ciencia y la ingeniería es pertinente hablar de un instrumento científico, el cual puede consistir de un aparato o dispositivo que esté diseñado específicamente bajo ciertos criterios estandarizados y que sirven para ayudar a la ciencia o a la ingeniería. Los datos que aportan son medidas numéricas sobre propiedades o fenómenos concernientes a las observaciones o experimentos que explican situaciones del mundo real. Así, se puede hablar de: (a) instrumentos de medida, (b) instrumentos de observación, y (c) instrumentos duales (que permiten ambas cosas). (Bertomeu)

Entonces, un instrumento científico debe generar un alto grado de exactitud y precisión de medidas que esté realizando y, que pueden corresponder a las variables que se hayan seleccionado con anterioridad (independientes o dependientes), además, estas medidas, son obtenidas de observaciones empíricas o procedimientos experimentales, sustentadas en el método científico y, que previamente, hayan tomado como referente un diseño experimental adecuado. (Wikipedia)

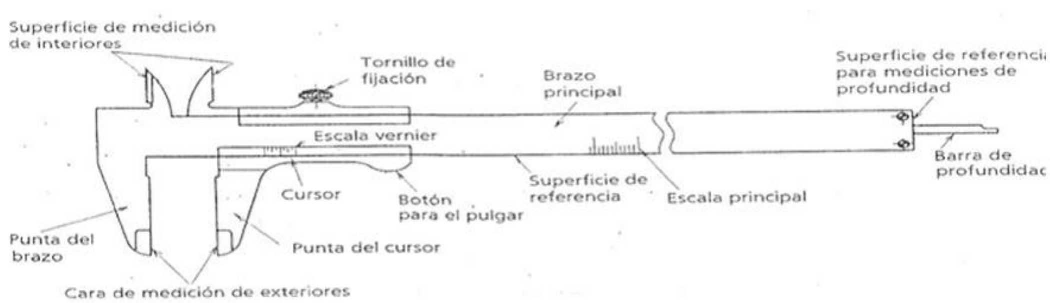
A continuación, se muestran algunos instrumentos científicos que se han desarrollado para algunas investigaciones que en su momento fueron realizadas para entender el entorno del hombre.

1. Física. (Aparato para la enseñanza de las leyes …)

Aparato de Haldat. Sirvió para verificar el valor de la presión hidrostática en el fondo de un recipiente.

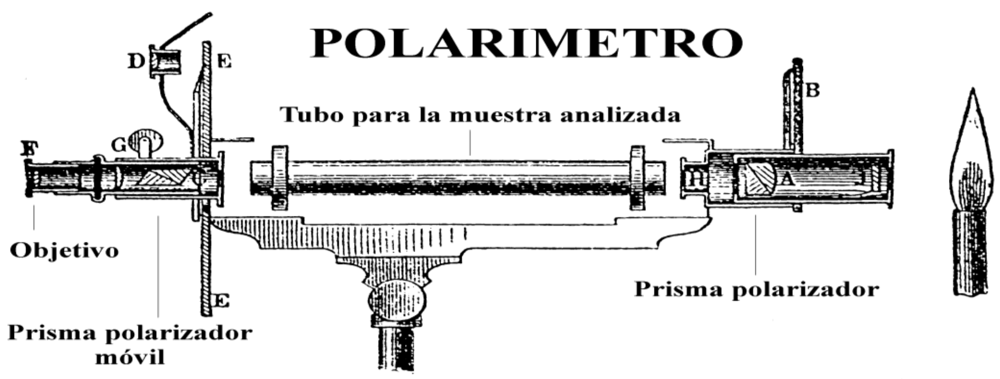


Calibre o pie de rey. Es un instrumento de medida de longitudes.



2. Química. (Bertomeu)

Polarímetro. Permite el cálculo de rotación del plano de rotación de la luz, a través del empleo de tres polarizadores. Se han empleado en el análisis de diversas sustancias como el azúcar.

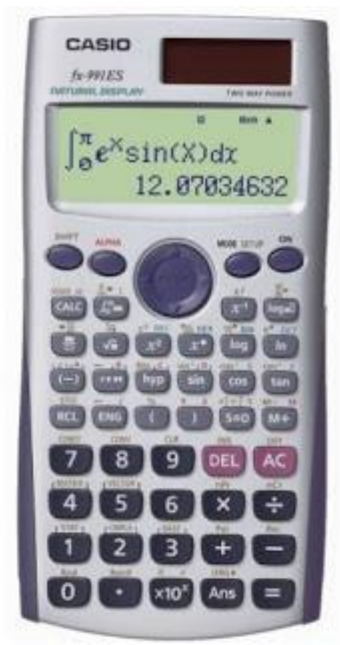


3. Biología. (Durán)

Microscopio. Es un instrumento óptico que permite observar objetos muy pequeños.

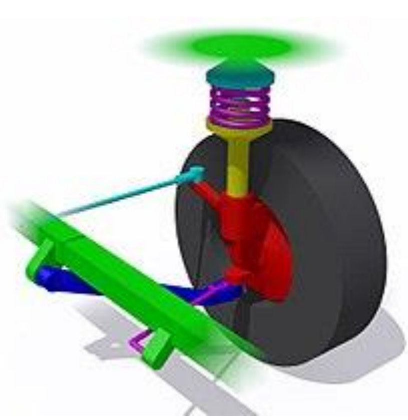
4. Matemática. (Delgado, 2015)

Calculadora científica. Permite calcular funciones matemáticas complejas y avanzadas.



5. Ingeniería mecánica. (Wikipedia)

Herramientas computacionales. Han permitido el diseño de procesos de fabricación, en base a modelos matemáticos y computadoras para la construcción de los objetos representados. Se muestra un prototipo de suspensión y dirección.



Referencias

Bertomeu, S. J. R.. *Los instrumentos científicos de la Universitat de València.* Consultado el 20 de febrero del 2018 en https://www.uv.es/bertomeu/material/museo/instru/pdf/Abriendo.pdf

Bertomeu, S. J. R.. *Instrumentos científicos utilizados en química.* Consultado el 22 de febrero del 2018 en https://www.uv.es/~bertomeu/material/museo/GUIA8.html

Delgado, S. D. (2015). *Herramientas del cálculo en la historia de la matemática.* Consultado el 22 de febreo del 2018 enm4t3m4t1c4libr3.blogspot.mx

Duran, (2018). *50 INSTRUMENTOS DE LABORATORIO DE BIOLOGIA.* Consultado el 22 de febrero del 2018 en https://www.academia.edu/9240729/50_INSTRUMENTOS_DE_LABORATORIO_DE_BIOLOGÍA

Historia de la ciencia. *Aparatos para la enseñanza de las leyes de la física del siglo XIX.* Consultado el 21 de febrero del 2018 en https://www.upct.es/seeu/_as/divulgación_cyt_09/Libro_Historia_Ciencia/web/aparato_de_haldat.htm

Wikipedia. *Instrumento científico.* Consultado el 21 de febrero del 2018 en https://es.wikipedia.org/wiki/Instrumento_científico

Wikipedia. *Ingeniería Mecánica.* Consultado el 22 de febrero del 2018 en https://es.wikipedia.org/wiki/Ingeniería_mecánica