MATEMATICA UNIVERSITARIA EN CONTEXTO

Juan Felipe Flores Robles
Viridiana Garcia Zaragoza
Bárbara Nayar Olvera Carballo
María Inés Ortega Arcega
Miriam Carolina Ortiz Torrescano
José Trinidad Ulloa Ibarra
Irma Daniela Viramontes Acuña

Universidad Tecnocientífica del Pacífico S.C.
UTP
EDITORIAL

Matemática Universitaria en Contexto

Editorial

Matemática Universitaria en Contexto, es una publicación editada por la Universidad Tecnocientífica del Pacifico S.C. Calle 20 de Noviembre #75, Pte. Col. Mololoa, CP: 63050. Tepic, Nayarit, México. Tel. (311)217-7877, http://www.tecnocientifica.com.mx. Noviembre 2019.

Primera Edición digital.

ISBN:

978-607-9488-92-5

Matemática Universitaria en Contexto

Autores

Juan Felipe Flores Robles
Viridiana García Zaragoza
Bárbara Nayar Olvera Carballo
María Inés Ortega Arcega
Miriam Carolina Ortiz Torrescano
José Trinidad Ulloa Ibarra
Irma Daniela Viramontes Acuña

Edición

Jesus Ernesto Caravantes Estrada

Diseño de Portada

Cruz Daniela Estrada Escalante

ÍNDICE

Introducción

La presente obra pretende dotar a docentes y estudiantes universitarios de herramientas que permitan el desarrollo del pensamiento matemático a fin de lograr una mejor comprensión de la matemática previa a su formación profesional.

En aras de responder a cuestionamientos como "¿para qué me sirve este contenido matemático?", un grupo de maestros han puesto en escena una serie de secuencias didácticas que permiten pasar del pensamiento concreto al abstracto a través de la contextualización y que ésta a su vez, permite realizar las conexiones necesarias para poder entender otros escenarios desde el pensamiento matemático y no solamente pensar en la matemática formal.

La práctica de la enseñanza de las matemáticas en los primeros años de la formación profesional, ha constatado una problemática permanente de la falta de conexión entre los cursos de matemáticas introductorios y la disciplina misma que se estudia durante una carrera profesional, centrándose en cursos de **matemática no contextualizados**. Incluso, carreras afines a las ciencias sociales, ciencias de la salud entre otras, han excluido la matemática en sus currículos.

La Matemática en el contexto universitario (título del libro) pretende romper con los cursos introductorios de matemática tradicionales y dar otra perspectiva, a fin de que se observen en diferentes escenarios como puede aplicarse la matemática "sin ser vista". Así, el objeto principal lo constituye la presentación de situaciones de **aprendizaje en contextos** de vida cotidiana, basado en el enfoque de la Educación Matemática Realista (EMR), impulsado por Freudenthal en la década de los ochentas.

La EMR no es una teoría generalizada del aprendizaje, es más bien una teoría global basada en los siguientes puntos de manera resumida:

- Pensar la matemática como una *actividad humana* (a la que Freudenthal denomina matematización), de modo tal que debe existir una matemática para todos.
- Aceptar que el desarrollo de la comprensión matemática pasa por distinto niveles donde los contextos y los modelos poseen un papel relevante y que ese desarrollo se lleva a cabo por el proceso didáctico denominado *reinvención guiada* en un ambiente de *heterogeneidad* cognitiva.
- Desde el punto de vista curricular, la reinvención guiada de la matemática en tanto actividad de matematización requiere de la *fenomelogía didáctica* como metodología, esto es, la búsqueda de contextos y situaciones que generen la necesidad de ser organizados matemáticamente, siendo las dos fuentes principales de esta búsqueda la historia de la matemática y las invenciones y producciones matemática espontaneas de los estudiantes.

Estructura del libro

El libro se estructura en cuatro capítulos, los cuales contemplan una serie de secuencias didácticas buscando el proceso de matematización, seguido de un apartado conceptual formal y concluye con una serie de ejercicios propuestos.

El primer capítulo trata en un primer momento de enfatizar la importancia del desarrollo del pensamiento y el lenguaje matemático, basado en la compresión e identificación de los objetos matemáticos y en un segundo momento, aborda conceptos como la noción de razones y proporciones.

El segundo capítulo trata de distinguir otro de los lenguajes matemáticos como el algebraico a través de situaciones reales o de conceptos escolares previos continuando con la aplicación de ecuaciones y culminando con progresiones aritméticas.

El tercer capítulo, introduce al lector a la compresión de la visualización gráfica, ofreciendo contextos de localización de coordenadas en el plano cartesiano y retoma los conceptos de razones y proporciones así como el de función y sucesiones, para llegar a la matematización de la función lineal y éste a su vez como modelo lineal.

El cuarto capítulo y último, pretende englobar los contenidos vistos en los capítulos anterior proponiendo la conceptualización y la praxis de la modelación matemática a partir de situaciones reales con datos reales, inquiriendo el "aterrizaje" del desarrollo del pensamiento y lenguaje matemático previos a la formación profesional de cualquier estudiante universitario, buscando así, que el estudiante pueda discernir de manera más fácil y congruente problemas de su campo profesional.

CAPÍTULO 1

PENSAMIENTO Y LENGUAJE NUMÉRICO

A MANERA DE INTRODUCCIÓN:

Quizás en más de una ocasión se haya preguntado qué es aquello que genera la articulación de ideas para poder comunicar una o varias ideas. A dicha articulación bien relacionada de ideas se le conoce como **PENSAMIENTO,** así, el análisis, la comparación, la generalización, la síntesis y la abstracción son algunas de las operaciones vinculadas al pensamiento, que determina y se refleja en el **LENGUAJE**, como una forma de comunicación.

En particular, el **PENSAMIENTO MATEMÁTICO**, consiste en la sistematización y la contextualización del conocimiento de las Matemáticas. Este tipo de pensamiento se desarrolla a partir de conocer el origen y la evolución de los **objetos matemáticos** que pueden ser todos aquellos símbolos, figuras y relaciones, incluso gestos o frases que le permiten a la matemática comunicarse.

En otras palabras, el pensamiento matemático es aquella capacidad que nos permite comprender las relaciones que se dan en el mundo circundante y posibilita cuantificarlas y formalizarlas para entenderlas mejor y poder comunicarlas. Consecuentemente, esta forma de pensamiento se traduce en el uso y manejo de procesos cognitivos tales como: razonar, demostrar, argumentar, interpretar, identificar, relacionar, graficar, calcular, inferir, efectuar algoritmos y **modelar en general** y, al igual que cualquier otra forma de desarrollo de pensamiento, es susceptible de aprendizaje (Yampufé, 2009).

El pensamiento matemático se construye siguiendo las etapas determinadas para su desarrollo. Existe una correspondencia entre el pensamiento sensorial, que en matemática es de tipo **intuitivo concreto**; el pensamiento racional que es **gráfico representativo** y el pensamiento lógico, que es de naturaleza **conceptual o simbólica.**

Por lo tanto, se puede decir que el pensamiento matemático, al igual que cualquier otra forma de pensamiento, es susceptible de aprendizaje, aun cuando resulta más adecuado decir que *"el pensamiento matemático no solo se aprende, sino que se forja"*.

PARA REFLEXIONAR

El desarrollo de las competencias en el pensamiento matemático responde a preguntas: ¿para qué?, ¿cómo? y ¿por qué? del pensamiento matemático; a manera de lluvia de ideas responde las siguientes preguntas:

1. ¿Para qué aprendemos matemática?

2. ¿Es importante desarrollar el pensamiento matemático? ¿Para qué?

3. ¿Cómo se promueve el desarrollo del pensamiento matemático?

¿Cómo se promueve el desarrollo del pensamiento matemático en tu formación profesional? El desarrollo del pensamiento matemático otorga también ciertos valores que conllevan al futuro profesionista competencias que le permite un mejor desarrollo tanto en su en su vida cotidiana como en su vida profesional, tales como:

Valor formativo: radica en la forma de razonamiento que tenemos y vamos formando con la mediación del aprendizaje; se desarrolla mediante la capacidad de razonar y demostrar.

Valor social: que permite dar a conocer a los demás nuestra forma de pensamiento ya que es un medio de comunicación, se desarrolla mediante la capacidad de comunicación matemática.

Valor Instrumental: que permite resolver situaciones problemáticas, se desarrolla mediante la capacidad de plantear y resolver problemas.

Aunado a estos valores, el desarrollo del pensamiento matemático permite también el desarrollo del **lenguaje matemático,** el cual se puede expresar mediante tablas, gráficas, símbolos e incluso palabras que comunican ideas matemáticas, los cuales se denominan **objetos matemáticos.** En otras palabras, los objetos matemáticos es todo aquello que utiliza la matemática para comunicarse.

MATEMÁTICA EN CONTEXTO 1.1

EL CASO DEL TRIBUNAL SUPERIOR DE JUSTICIA.
Observe con atención las siguientes imágenes, analice la información sobre las estadísticas del Tribunal Superior de Justicia del Estado de Nayarit, a través del Boletín Estadístico Anual.

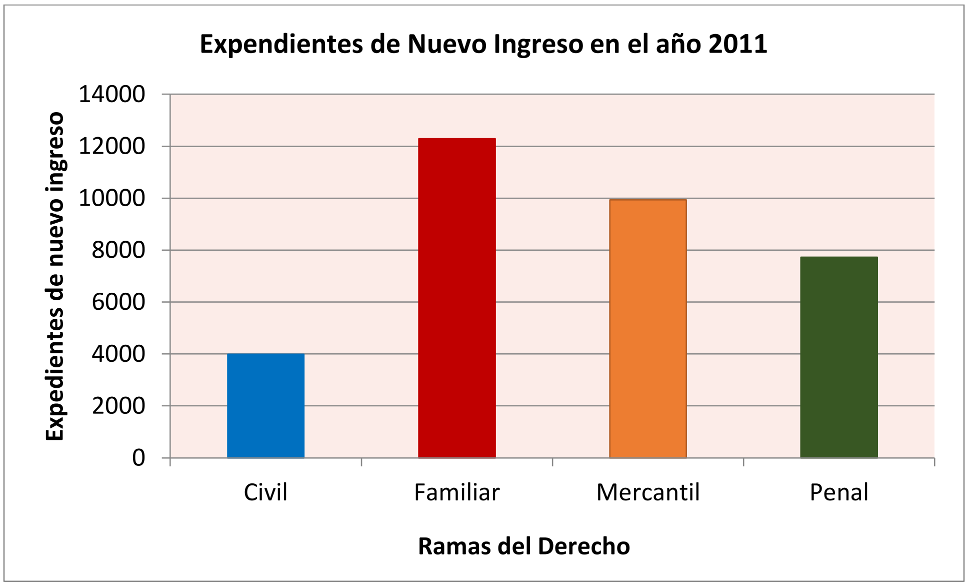
Sección A.1. Expedientes de Nuevo Ingreso del Año 2011

	Civil	Familiar	Mercantil	Penal	Total
Ingresos	3987	12297	9936	7726	33946
Porcentaje	11.75%	36.23%	29.27%	22.76%	100%

FUENTE: TSJ (2011)

¿Sabías qué? ....

Las pastas de los expedientes que ingresan a los juzgados en Nayarit, son clasificados por colores según la rama del derecho. Donde azul corresponde a la rama civil, roja a familiar, naranja a la mercantil y verde a la rama penal.



Expedientes Terminados por Conciliación del Año 2011

Juzgado	Total	Juzgado	Total
Acaponeta Civil	25	San Pedro Lagunillas	14
Acaponeta Penal	29	Tecuala Civil	11
Ahuacatlán	5	Tecuala Penal	41
Amatlán de Cañas	1	Tuxpan	11
Bucerias 1o. Civil	41	Villa Hidalgo	15
Bucerias 2do. Civl	44	Xalisco	17
Bucerias Penal	52	Adolescentes	4
Compostela	4	1°Familiar	112
Huajicori	9	2° Familiar	128
Ixtlán del Río	16	3° Familiar	159
Jala	2	1° Civil	32

Jesús María	10	2° Civil	23
Las Varas Civil	3	3° Civil	57
Las Varas Penal	48	1° Mercantil	0
Puente de Camotlán	1	2° Mercantil	14
Rosamorada	12	3° Mercantil	7
Ruiz	8	1° Penal	144
San Blas	64	2° Penal	174
Santa María del Oro	30	3° Penal	132
1° Santiago	16	4° Penal	112
2° Santiago	45		

1. Decodifique el lenguaje matemático utilizado en las imágenes anteriores y escriba en la siguiente tabla los elementos que se solicitan:

Ejemplos de Objetos		
Objeto matemático	**Nombre**	**Se utiliza para:**
	Gráfica de barras	Comparar cantidades discretas y describe un contexto de manera cuantitativa a través de la relación de dos variables.

2.- Conteste las siguientes preguntas:

1. ¿Cuántos y cuáles son los objetos matemáticos que se encontraron?

2. ¿En qué rama del Derecho, ingresó el mayor número de expedientes en el año 2011?

4. ¿Qué porcentaje de ingresos por expediente se tuvieron en la rama Civil? Traduzca éste número en un número racional y no en porcentaje.

5. ¿En qué rama del derecho hay mayor número de juzgados?

6. Elabore una gráfica que represente los expedientes terminados por conciliación.

7. Investigue con sus compañeros de equipo si de acuerdo con el Sistema Judicial actual se han modificado estos datos y señala si se han concluido más o menos expedientes por Conciliación con respecto al año 2011.

8. Elabore un cuadro comparativo con la información obtenida en el apartado 6.

9. Cada uno de los grupos, expondrá frente a la clase sus conclusiones, así como dialogar y compartir impresiones.

PARA REFLEXIONAR

A manera de conclusión, con base en la actividad anterior, conteste las siguientes preguntas en conjunto con el grupo.

1. ¿Es importante desarrollar el pensamiento matemático? ¿Para qué?

2. ¿Cómo se promueve el desarrollo del pensamiento matemático en tu formación profesional?

¿QUÉ COMUNICAN LOS NÚMEROS?

Uno de los objetos matemáticos elementales son los números, que se definen como aquel símbolo que representa una cantidad. Sin embargo, no todos los números representan cantidades, existen números que son simplemente designaciones, etiquetas, tales como las rutas de los autobuses, el número telefónico o el perfume "CHANEL No. 5" que sugiere una serie de perfumes diferenciados por un número y que resultan ser inventados por la marca. ®

No obstante, el hecho de que los números sean utilizados como etiquetas, no es menos importante su efectividad para dar orden, por ello la humanidad ha generado sistemas de numeración con la finalidad de ordenar objetos y **contarlos**.

Cuando somos pequeños aprendemos que el 1 es el primero del "alfabeto numérico" y que continúa un conteo seguido del 2, 3, 4, 5… asumiendo que es sólo eso, un conteo, sin embargo, es hasta después cuando nos es posible contar la ausencia de elementos, tal y como lo menciona Tony Crilly:

“Contemos el número de manzanas que hay en una caja cuando no hay ninguna”.

Se cree que el uso del símbolo que designa “la nada” tuvo su origen hace miles de años en nuestro país y que fue la cultura maya la que utilizó **el cero** en diversas formas, hoy día el cero tiene distintas connotaciones, dos de sus funciones principales, la primera es que se hace patente en su uso como marcador de posición, por ejemplo, el número 32 del número 302. La segunda, es como un **número genuino**, cuyo origen de este significado se le otorga al matemático indú Brahmagupta, quien intentó integrarlo al **sistema de numeración** alrededor del año 600.

LA COMUNICACIÓN DE LOS NÚMEROS DESDE SUS RELACIONES

Los números pueden relacionarse a través de las cuatro operaciones básicas: la suma, la resta, la multiplicación y la división. Cuando se está restando o dividiendo entonces se realiza una comparación de las cantidades, si se restan, entonces lo que se está buscando es identificar cuál número es mayor calculando la diferencia que existe entre ambos, pero si se divide entonces estamos identificando “cuántas veces contiene una cantidad a la otra”.

MATEMÁTICA EN CONTEXTO 1.2.

EL CASO DE LA VISITA AL SUPERMERCADO

Acudes al supermercado y al llegar a un estante de frutas y verduras encuentras un anuncio como el que se muestra en la figura:

1. ¿Qué te comunica la imagen?

3. ¿Cómo puede representar esas variables de manera simbólica?

4. Si fueras a comprar 2 kg de naranja, ¿cuánto pagarías?

5. Complete la siguiente tabla:

Kg	Operación	$
0		
1		
1.5		
2		
2.5		
2.8		
15		
n		

6. ¿Qué relación encuentra entre las variables?

7. Realice una gráfica con los datos anteriores, tomando como variable independiente el peso y como variable dependiente el precio.

8. ¿Qué "forma" encuentra, en la gráfica anterior?

9. ¿Por qué considera que se genera la "forma" encontrada?

Como se observa en el ejercicio anterior, a través de la multiplicación pudiste encontrar los resultados de la variable pesos ($), sin embargo, las mismas variables también la puedes relacionar a través de la división generando así una **razón** que se define como la relación de dos cantidades a través de su cociente.

P. ej.

"Por cada kilogramo de naranjas, debe pagarse $15.00", traduciendo esto a un lenguaje numérico en términos de razón (haciendo abuso de la notación matemática):

$$\frac{\$15}{1kg\ naranjas}$$

Como observó en la reflexión propuesta por la pregunta 6, se pueden establecer igualdades entre las razones de la tabla anterior, es decir, se puede asegurar que la relación entre dos cantidades es igual a otra relación entre otras dos cantidades:

"Si por cada kilogramo de naranjas, se debe pagar $15,00; entonces por cada 2 kilogramos de naranjas deben pagarse $30.00"

Traduciendo el enunciado anterior al lenguaje numérico, tenemos:

$$\frac{\$15}{1kg\ naranjas} = \frac{\$30}{2kg\ naranjas}$$

A esta igualdad de razones, se le conoce como **proporción.** Y de manera general puede representarse así:

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}}$$

O también,

a:b :: c:d y se lee, *"**a** es a **b** como **c** es a **d**".* En proporciones, a y d son llamados *extremos* y, b y c son llamados *medios.*

MATEMÁTICA EN CONTEXTO 1.3.

EL CASO DE LA CONSTRUCCION DE UNA BARDA

Cuatro obreros tardan 10 días en construir una barda. ¿Cuánto tardarán 6 obreros en hacer el mismo trabajo?

No. de obreros	Días
4	10
6	n

1. Y, ¿si fueran 3 obreros?

2. ¿Qué variables encuentra?

3. ¿Cuál es la relación que existe entre estas variables?

4. Añade a la tabla al menos tres valores más a la cantidad de obreros

No. de obreros	Días
1	
2	
3	
4	10
6	
7	
8	
9	
19	
n	

5. Grafica los resultados de la tabla anterior

6. ¿Cómo es la gráfica que encontraste?

7. ¿Cuántos obreros se necesitarían para tardar en construir la barda en menos de un día?

PARA REFLEXIONAR

A partir de las actividades de matemáticas en contexto 2 y 3, y respecto a la relación entre las variables, conteste lo siguiente:

1. Describe las diferencias entre las gráficas

2. ¿Cuáles fueron los principales retos o dificultades al construir las gráficas?

3. ¿Cuál es la importancia de la relación entre las dos variables a partir de la dependencia entre las mismas?

Las proporciones pueden clasificarse de dos maneras: a) la **proporción directa** en donde las variables pueden aumentar o disminuir de valor en la misma proporción y b) la **proporción inversa** en donde al aumentar una de las variables puede disminuir la otra variable y viceversa.

En matemáticas, se dice que una magnitud o cantidad es función de otra si el valor de la primera depende exclusivamente del valor de la segunda. Por ejemplo, el área A de un círculo es función de su radio r: el valor del área es proporcional al cuadrado del radio, $A = \pi \cdot r^2$. Del mismo modo, la duración T de un viaje de tren entre dos ciudades separadas por una distancia d de 150 km depende de la velocidad v a la que este se desplace: la duración es inversamente proporcional a la velocidad, d/v. A la primera magnitud (el área, la duración) se la denomina variable dependiente, y la cantidad de la que depende (el radio, la velocidad) es la variable independiente.

MATEMÁTICAS EN CONTEXTO 1.4.

EL CASO DE LA DOSIS DE UN MEDICAMENTO

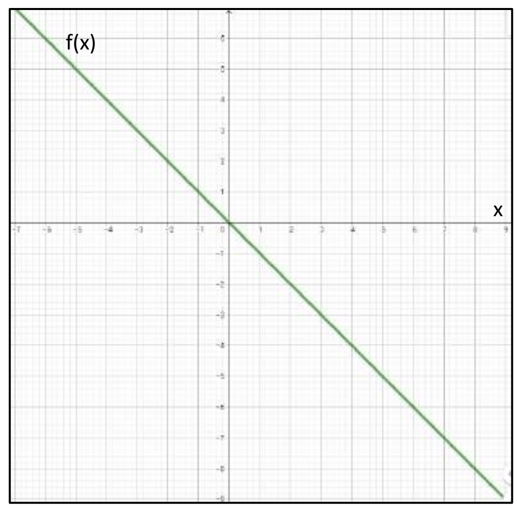
Prometazina está disponible en una concentración de 25mg/ml para administrar 1.5ml ¿Cuántos mg se deben dar?

Se prescribe Demerol 75 mg para dolor posoperatorio. El medicamento está disponible en la presentación 100 mg por ml. Para administrar la dosis preescrita de 75 mg ¿Cuánto ml debe administrar la enfermera? (Boyer, 2006:69)

Peso (mg)	V (ml)
100	1
75	x

PARA CONSTITUIR EL LENGUAJE MATEMÁTCO

a) A la derecha se presenta la gráfica de la función f, ¿$f(x)$ representa a una función proporcional inversa o directa? Justifica tu respuesta:



b) ¿Qué estrategia usaste para poder responder y justificar?

c) Dada la función en su representación tabular, como tabla de valores, completa la frase:

x	y
1	14
2	28
3	42
4	56

La tabla de valores representa una función de proporcionalidad__________, porque ____.

¿Qué estrategia usaste para responder y justificar? ____.

MATEMÁTICA EN CONTEXTO 1.6.

EL CASO DE LA GUARDERÍA

Una guardería con 250 niños proporciona 4 raciones de alimentos diarios a cada pequeño durante 18 días. Si la población aumenta a 50 niños,

1. ¿cuántos días durarán los alimentos si se disminuyen a 3 raciones diarias?

No. de niños	Raciones	Días
250	4	18
300	3	n

2. ¿Cuántas variables existen?

3. ¿Cuáles son dichas variables?

4. Grafique las variables raciones – días

5. Grafique en el mismo plano las variables número de niños – días

6. ¿Qué tipo de relación (proporción) existe entre las variables? (justifique su respuesta)

Lo anterior se denomina como proporcionalidad compuesta o mixta y se utiliza cuando se tienen más de dos variables relacionadas de manera directa o inversamente proporcional.

PROBLEMAS PROPUESTOS

I. **INSTRUCCIONES.** Escribe dos ejemplos de tu formación profesional en donde se esté utilizando el pensamiento matemático.

II. **INSTRUCCIONES.** Resuelve los siguientes problemas y elabora una tabla y una gráfica en cada caso que se solicite.

   1. Seis personas pueden vivir en un hotel durante 12 días por $792 USD ¿Cuánto costará el hotel de 15 personas durante ocho días?

   2. 11 obreros labran un campo rectangular de 220 m de largo y 48 de ancho en 6 días. ¿Cuántos obreros serán necesarios para labrar otro campo análogo de 300 m de largo por 56 m de ancho en cinco días?

3. Tres trabajadores recolectan 100 manzanos en 5 horas. Uno de ellos ha sufrido un accidente laboral y no puede continuar. Calcular cuánto se tardará en recolectar los 300 manzanos restantes entre los dos trabajadores activos.

4. Un camión realiza todos los días el mismo recorrido entre dos almacenes. Se sabe que tarda 3 horas y 20 minutos porque mantiene una velocidad constante de 90km/h. Mañana se debe entregar un paquete urgente, pero el camión no puede superar la velocidad máxima de 110km/h. Calcular el tiempo que tarda en realizar el envío a velocidad máxima.

5. Un carpintero tarda 18 días en realizar 3 armarios trabajando 5 horas al día. ¿Cuántos días necesitará para construir 5 armarios empleando 3 horas al día?

6. Una pieza de tela de 2.5m de larga y 80cm de ancha cuesta $30. ¿Cuánto costara otra pieza de tela de la misma calidad de 3m de larga y 12m de ancha?

7. En un hotel están alojadas 325 personas. De ellas, 39 son italianas, 117 francesas, 78 son alemanas y el resto rusas. Calcula el % que representa cada grupo sobre el total.

8. En el pasado Julio regalado he visto el precio de un televisor: 19640 + 16% de IVA. ¿Cuánto cuesta el televisor? Si sobre el precio total me hacen un descuento del 5% ¿Cuánto debo pagar por el televisor?

9. En una panadería, con 80 kilos de harina hacen 120 kilos de pan. ¿Cuántos kilos de harina serían necesarios para hacer 99 kilos de pan?

10. Si hoy han faltado a clase por enfermedad el 20% de los 42 alumnos/as, ¿cuántos alumnos han asistido? ¿Cuántos alumnos/as han faltado?

CAPÍTULO 2

PENSAMIENTO Y LENGUAJE ALGEBRAICO

A MANERA DE INTRODUCCIÓN:

En el capítulo anterior, vimos que el lenguaje matemático es la relación de objetos o constructos matemáticos que están en función al contexto. Uno de los lenguajes matemáticos principales es el de **lenguaje algebraico**, el cual refiere a la forma de traducir a símbolos y números todo lo que tomamos como expresiones particulares; en dicho lenguaje se puede manipular, formular y dar solución a problemas matemáticos de manera general.

El lenguaje algébrico permite vincular la aritmética con el **álgebra** por medio de la orientación de aspectos numéricos como geométricos, hasta ideas algebraicas tales como variable, relación funcional y el número general.

Se considera al **Álgebra** como la rama de las matemáticas que estudia las estructuras, relaciones y cantidades de un modo más general y abstracto que la Aritmética (Díaz, J. 2003).

Los símbolos ($\prod \sqrt{} \sum \; \geq \; \alpha \, \% + = \neq \; \int \; \infty$) son caracteres gráficos llamados logograma (Pimm,1990) cada símbolo tiene un significado concreto, los cuales son parte esencial para la construcción del lenguaje algebraico.

Para poder tener un lenguaje algebraico formal que pueda representar una situación problema, es necesario dominar reglas, las cuales establecen un vínculo más apropiado entre ambos lenguajes.

Una de la formas que tiene el álgebra para "comunicarse" es la expresión algebraica, la cual puede ser dese un número hasta cualquier combinación entre letras y números que están ligados por signos operacionales, por ejemplo las expresiones: **5,** $\boldsymbol{x + 5. -x^3}$, entre otras.

Por lo tanto, el **lenguaje algebraico** es aquel que permite transformar de lenguaje habitual u ordinario al lenguaje matemático de tal manera que ayuda a representar lo hablado en lenguaje abstracto, el cual se represente por medio de variables y números.

MATEMÁTICA EN CONTEXTO 2.1

EL CASO DE LA VISITA AL TIANGUIS

Acudes al tianguis. En el primer puesto compra limones y manzanas, por lo primeros paga $17.00 y por las manzanas $26.00. En otro puesto compró huevos, el precio por unidad es de $2.00, su cuenta fue de $24.00. En el puesto del pollo compró un pollo completo, pagó con un billete de $100.00 y le regresaron $10.00.

1. ¿Qué operaciones están involucradas en esta visita al tianguis? Menciónelas y justifíquelas.

2. ¿Cómo identificaste las operaciones de la situación planteada?

3. ¿Qué palabras te resultan clave para identificar dichas operaciones?

4. ¿Qué otros nombres reciben estas operaciones?

Escribe en el espacio, de qué otra manera pueden nombrarse los operadores.

Operador	Lenguaje ordinario
+	
-	
×	
÷	

PARA REFLEXIONAR

Existen otro tipo de operaciones comunes en el lenguaje matemático como lo son las potencias y los radicales. Por ejemplo, un caso de potenciación, es la determinación del número de células mediante el proceso de mitosis, el cual, de manera general se expresa como $n = 2^t$, donde n representa el número de células existentes en el tiempo t.

Sin embargo, para determinar las pulgadas de una pantalla se requiere calcular la longitud de la diagonal a través de la expresión $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ donde "c" es la longitud de la diagonal, "a" es el ancho de la pantalla y "b" el largo.

PARA CONSTRUIR EL LENGUAJE ALGEBRAICO

Transforma el lenguaje ordinal al lenguaje matemático o viceversa dependiendo el caso.

Lenguaje ordinario	Lenguaje Algebraico
El cuadrado del tiple de un número cualquiera.	
	$x + (x + 1) + (x + 2)$
La mitad de la suma de los cuadrados de dos números.	
	$2(x - y)$
El área de un triángulo es igual a la multiplicación de la base por la altura entre dos.	
La fuerza es igual al producto de la masa por la aceleración.	
	IMC = $\frac{Kg}{m^2}$ (IMC = Índice de masa corporal)
De acuerdo con los artículos 52, 53 y 54 de la Constitución Política de los Estados Unidos Mexicanos relativos a la cámara de diputados, para la elección de una vacante se asigna 2 al de mayor preferencia, 1 al de menor preferencia y 0 al de total desagrado.	
	$\boldsymbol{d = v * t}$
La media aritmética (el promedio) es igual a la suma de un conjunto de datos dividido entre el número total de estos datos.	
	I =M-C
El interés compuesto es el producto del capital por la tasa de interés elevado a la unidad de tiempo.	

MATEMÁTICA EN CONTEXTO 2.2

EL CASO DEL RESORTE

Los jóvenes de la carrera de ingeniería mecánica realizaron una práctica con unos resortes, el profesor encargado de la unidad de aprendizaje, les pidió que tomaran datos del estiramiento de los resortes, la toma de datos fue manera empírica por lo que es necesario expresar dichos datos en un lenguaje algebraico, para su análisis.

a) Uno de los resortes cuelga verticalmente de un soporte, tiene una longitud inicial de 20 cm y se estira 0.5 cm por cada Kg que sostiene.

b) En un soporte se tiene un resorte el cual mide 10 cm, se le pone una pesa de 20 kg, logrando una longitud de 45 cm.

Otro grupo de jóvenes expresó la toma de datos con un lenguaje algebraico. Ahora necesita platicar a sus compañeros cómo fue el experimento.

a) $\mathbf{0.2x + 15}$

b) $\mathbf{30x + 20 = 60}$

Mientras que una ecuación es la igualdad entre dos expresiones algebraicas, ejemplo $\boldsymbol{a + 32 = 3a - 2}$ y una fórmula matemática es una ecuación que relaciona constantes o variables matemáticas que se expresa mediante una igualdad la cual ayuda a interpretar una información determinada, por ejemplo $\boldsymbol{A = \pi r^2}$.

PARA REFLEXIONAR

Una **ecuación** se define como la igualdad entre dos expresiones algebraicas que contienen una o más incógnitas, las cuales cumplen ciertas condiciones, que facilita el descubrimiento de los valores de las incógnitas, mismas que deben satisfacer a la igualdad. Existen diferentes tipos de ecuaciones:

Nombre	Definición	Representación
Lineal	Ecuación donde el exponente de su variable es de grado 1.	$\mathbf{x + 8 = 20}$ $\boldsymbol{x + 3 = -x + 7}$ $\boldsymbol{ax + bx = c}$
Cuadrática	Ecuación en la cual el exponente mayor de su variable es de grado 2.	$\mathbf{x^2 + 3x + 4 = 120}$ $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = d}$
Cúbica	Ecuación en la cual el exponente mayor de su variable es de grado 3.	$\mathbf{x^3 + x - 2 = 37}$ $\boldsymbol{ax^3 + bx^2 + cx + d = e}$

MATEMÁTICA EN CONTEXTO 2.3

EL CASO DEL PAGO DE INSCRIPCIÓN

Dos grupos de estudiantes de la universidad realizan un estudio para conocer cuánto es lo que pagan por inscripción al plantel con beca y sin beca. Si el estudio del equipo A dice que diez estudiantes con beca junto con quince estudiantes sin beca pagaron en total quince mil cuatrocientos cincuenta pesos, mientras que el equipo B dice que veinticinco estudiantes sin beca junto con trece estudiantes con beca pagaron veinticuatro mil cuatrocientos treinta pesos.

1. ¿Cuál es la representación algebraica de cada equipo?

2. ¿Qué estrategia emplearías para conocer el precio de los estudiantes con beca y sin beca?

3. ¿Con esta estrategia se pueden obtener los precios de ambos equipos? ¿Por qué?

4. ¿Cuánto es el pago de inscripción para estudiantes con beca y sin beca?

5. Comenta con tus compañeros tus estrategias para encontrar el precio de las inscripciones en ambas condiciones de los estudiantes respecto a la beca.

6. ¿Cambian los precios con tu estrategia? Argumenta tu respuesta.

PARA REFLEXIONAR

Se entiende por **sistema de ecuaciones con n incógnitas** al conjunto de m ecuaciones lineales con las mismas n incógnitas. Un sistema de ecuación se representará:

$$\begin{cases} \boldsymbol{a_1x + b_1y \neq c_1} \\ \boldsymbol{a_2x + b_2y \neq c_2} \end{cases}$$

Para encontrar el valor de las variables existen diferentes métodos: reducción, sustitución, igualación y gráfico. Investígalos y completa la siguiente tabla.

Nombre del Método	Características del Método	Algoritmo del Método	Ejemplo del Método
Reducción			
Sustitución			
Igualación			
Determinantes			

Gráfico			

MATEMÁTICA EN CONTEXTO 2.4.

EL CASO DEL NUEVO EMPLEO

Suponga que le ofrecen un trabajo con un salario inicial de $6500.00 mensuales con opción de un aumento salarial de $400.00 anuales. Determine cuál será el sueldo en la siguiente tabla:

Años	**0**	**1**	**2**	**3**	**5**	**8**	**11**	**…**	**n**
Sueldo Final									

1. ¿Qué relación encuentras entre las variables?

2. Realice una gráfica con los datos anteriores

3. ¿Qué "figura" encuentra, en la gráfica anterior?

4. ¿Por qué considera que se genera la figura encontrada?

5. ¿Qué significa que la gráfica no parta del origen?

6. ¿Cuál es la expresión algebraica que representa la situación planteada?

7. Encuentra el sueldo al cabo de 28 años de servicio

8. Encuentre el sueldo al momento de su jubilación

MATEMÁTICA EN CONTEXTO 2.5

EL CASO DE LA UTILIDAD. BANCO A

En una institución bancaria (Banco A), me brindan un plan de inversión para un capital de $30,000.00, la cual se representa de la siguiente manera:

Tiempo (Días)	Ganancia $
0	0
5	20.55
15	61.64
25	102.74
30	123.29
40	164.38
60	246.58
80	328.77
90	369.86

1. Elabore una gráfica con los datos anteriores.

2. ¿Cómo es la gráfica?

3. La gráfica, ¿corresponde a una función?

4. ¿Qué tipo de función es?

5. Para que fuera una función lineal, ¿Cuáles tendrían que ser los pares ordenados? Completa la tabla.

Tiempo (días)	Utilidad ($)
0	0
5	20.55
10	
15	
20	
25	
30	
40	
60	
80	
90	
n	

6. Grafique sobre la gráfica del punto tres la tabla anterior y explique qué diferencias encuentra.

7. Si la columna de la variable utilidad es una sucesión, ¿Cuál sería su término general?

8. ¿Qué representa el término general?

PARA REFLEXIONAR

En el lenguaje corriente las palabras “serie” y “sucesión” son sinónimas y se utilizan para designar un conjunto de cosas o sucesos dispuestos en un orden. En Matemáticas, estas palabras tienen un significado técnico especial. La palabra “sucesión” tiene un sentido análogo al del lenguaje corriente, pues con ella se quiere indicar un conjunto de objetos puestos en orden, pero la palabra “serie” se usa en un sentido completamente distinto.

Si a cada entero positivo “n” se le asocia un número real an, entonces se dice que el conjunto ordenado: a1, a2, …, an define una sucesión infinita. Cada término de la sucesión tiene asignado un entero positivo, de manera que se puede hablar del primer término a1, del segundo término a2 y en general del término n-ésimo an. Cada término an tiene un siguiente an−1 y por tanto no hay un “último término”.

Los ejemplos más corrientes de sucesiones se pueden construir dando alguna regla o fórmula que defina el término n-ésimo. Así, por ejemplo, la fórmula an = 1, donde n define la sucesión cuyos cinco primeros términos son: 51, 41, 31, 21.

El valor “n” de la función se denomina el término n-ésimo o término general de la sucesión. (Molinàs y Martínez, n.d.)

EJERCICIOS PROPUESTOS

INSTRUCCIONES: Resuelve lo siguiente.

1. ¿Cuál es el área de un rectángulo sabiendo que su perímetro mide 16 cm y que su base es el triple de su altura?

2. Una granja tiene pavos y cerdos, en total hay 58 cabezas y 168 patas. ¿Cuántos cerdos y pavos hay?

3. Antonio dice a Pedro: "el dinero que tengo es el doble del que tienes tú", y Pedro contesta: "si tú me das seis euros tendremos los dos la misma cantidad". ¿Cuánto dinero tenía cada uno?

4. En la granja se han envasado 300 litros de leche en 120 botellas de dos y cinco litros. ¿Cuántas botellas de cada clase se han utilizado?

5. En mi clase están 35 alumnos. Nos han regalado por nuestro buen comportamiento 2 bolígrafos a cada chica y un cuaderno a cada chico. Si en total han sido 55 regalos, ¿cuántos chicos y chicas están en mi clase?

6. En un puesto de verduras se han vendido 2 Kg de naranjas y 5 Kg de papas por 96 pesos y 4 Kg de naranjas y 3 Kg de papas por 108 pesos. Calcula el precio de los kilogramos de naranja y papa.

7. Halla dos números tales que si se dividen el primero por 3 y el segundo por 4 la suma es 15; mientras que si se multiplica el primero por 2 y el segundo por 5 la suma es 174.

8. En una librería han vendido 20 libros a dos precios distintos: unos a 800 ptas. y otros a 1200 ptas. con los que han obtenido 19.200 ptas. ¿Cuántos libros han vendido de cada precio?

9. Determina dos números tales que la diferencia de sus cuadrados es 120 y su suma es 6.

10. Mi padrino tiene 80 años y me contó el otro día que entre nietas y nietos suman 8 y que si les diese 1.000 ptas. a cada nieta y 500 a cada nieto se gastaría 6.600 ptas. ¿Cuántos nietos y nietas tiene mi padrino?

11. Sabemos que mi tío tiene 27 años más que su hijo y que dentro de 12 años le doblará la edad. ¿Cuántos años tiene cada uno?

12. Encuentra dos números sabiendo que la mitad de su suma es 218 y el doble de su diferencia es 116.

13. Calcular el término del lugar 11 de la progresión 5, 10,15, …

14. Encontrar el décimo término de las siguientes progresiones aritméticas
    a) {2,9, 16, 23, 30, 37, …}
    b) {3, 6, 9, ...}
    c) {1, 5, 9,13, …}

15. Encontrar el término general siguientes progresiones aritméticas:
    a) {1, 5, 9, 13, …}
    b) {1, 8,15, 22, …}
    c) {1,10, 19, 28}

CAPÍTULO 3

PENSAMIENTO Y LENGUAJE GRÁFICO

A MANERA DE INTRODUCCIÓN

El uso de representaciones algebraicas, geométricas, tabulares e inclusive textuales son consideradas fundamentales para el mejoramiento de los procesos cognitivos. El lenguaje gráfico a partir de las representaciones semióticas (Duval, 2004) y el uso de herramientas tecnológicas, desde una perspectiva cognitiva y no sólo amplificadora (Espino, Hugues y Ulloa, 2014), es uno de los retos en la educación matemática, debido la conceptualización de aquellos elementos inherentes en el uso y análisis de las funciones desde el lenguaje algebraico.

Visualización es la generación de una imagen mental o una imagen real de algo abstracto o invisible. La **visualización matemática** según Cantoral y Montiel, (2000) es la habilidad para representar y transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual. En este sentido trata de un proceso mental muy usado en diferentes áreas del conocimiento matemático y más generalmente del conocimiento científico.

IMAGEN 1. RADIOGRAFÍA DE CRÁNEO.

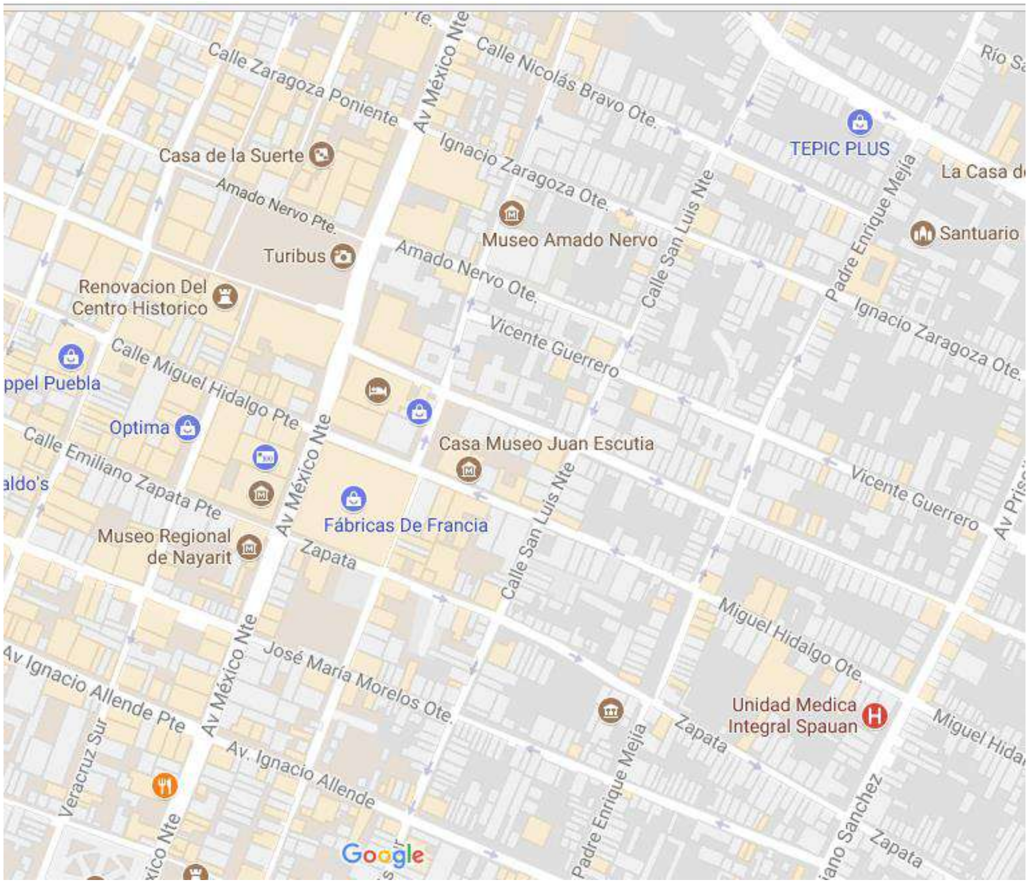
Por ejemplo, para el campo de la medicina la interpretación de una radiografía permite visualizar parte del estado de salud de un paciente sin la necesidad de intervención quirúrgica. Desde la matemática, la misma la radiografía, a partir de las tonalidades como parámetros medibles y comparables, que dan cuenta del estado de salud.

MATEMÁTICA EN CONTEXTO 3.1.

VISITA LOS MUSEOS DE TEPIC

Como parte de un proyecto de la Unidad Académica de Turismo, un grupo de estudiantes están diseño un producto turístico, que consiste en el recorrido por todos los atractivos turísticos del centro de Tepic.

Para trazar la ruta del recorrido buscaron el siguiente mapa



Estás ubicado en estación de Turibus, y hay dos formas de hacer el recorrido:

a) Subiendo al Turibus, tomando en cuenta el sentido de las calles
b) Caminando, donde el sentido de las calles no es relevante.

El recorrido comprende los siguientes lugares de interés:

a) Museo regional de Nayarit
b) Casa Museo Juan Escutia
c) Museo Amado Nervo
d) Catedral
e) Centro Estatal de Culturas Populares (Casa de los cuatro Pueblos)
f) El mercado Juan Escutia

Traza la ruta tratando de recorrer la menor distancia posible y tomando como unidad la cuadra. ¿Cuál fue el criterio para elegir la ruta?

Si la Avenida México se considera le eje de las abscisas (eje x) y la calle Miguel Hidalgo es el eje de las ordenadas (eje y):

1. ¿Cuáles serían las coordenadas (pares ordenados) de cada lugar?

2. Apoyándote de las coordenadas definidas en la pregunta 1, define la secuencia de coordenadas correspondiente a tu ruta.

PARA REFLEXIONAR

El plano cartesiano está representado por coordenadas cartesianas o coordenadas rectangulares las cuales son un tipo de coordenadas ortogonales usadas en espacios euclídeos, para la representación gráfica de una función, en geometría analítica, o del movimiento o posición en física, caracterizadas porque usa como referencia ejes ortogonales entre sí que se cortan en un punto origen. Las coordenadas cartesianas se definen, así como la distancia al origen de las proyecciones ortogonales de un punto dado sobre cada uno de los ejes. La denominación de “cartesiano” se introdujo en honor de René Descartes, filósofo, abogado y parlamentarista, quien lo utilizó de manera formal por primera vez.

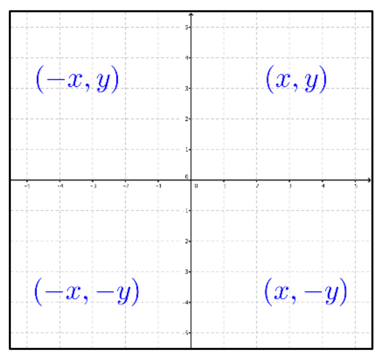


FIGURA 1. PLANO CARTESIANO.

Si el sistema en si es un sistema bidimensional, se denomina plano cartesiano. El punto de corte de las rectas se hace coincidir con el punto cero de las rectas y se conoce como origen del sistema. Al eje horizontal o de las abscisas; y al eje vertical o de las ordenadas. Al cortarse las dos rectas dividen al plano en cuatro regiones, estas zonas se conocen como cuadrantes.

El plano cartesiano es dividido en cuatro cuadrantes, y en donde cada uno de estos tienen características particulares respecto al signo de las coordenadas, tal y como se puede observar en la Figura 1, este es utilizado para asignar una ubicación a cualquier punto en el plano, en donde cada punto tiene coordenadas (*x,y*), a este conjunto se le domina "par ordenado".

MATEMÁTICA EN CONTEXTO 3.2.

EL CASO DEL CRECIMIENTO DE UN BEBÉ (NIÑA)

La siguiente tabla muestra la talla promedio de niñas recién nacidas durante las primeras seis semanas.

Semanas	Talla aproximada (cm)
0	49.1
1	50.3
2	51.5
3	52.7
4	53.9
5	55.1

Fuente: OMS, 2017

1. ¿Cuál será la talla de una niña a las seis semanas?

2. ¿Cómo llegaste a la respuesta anterior?

3. ¿Cuánto medirá a las diez semanas, si el crecimiento se mantiene constante?

4. ¿Cuánto mediría en la semana "s"?

6. Grafica en un plano cartesiano el crecimiento de las primeras diez semanas, (recuerda que, en todo fenómeno, el tiempo siempre es una variable independiente) y etiqueta cada par ordenado.

7. ¿Cómo encontraste los valores faltantes?

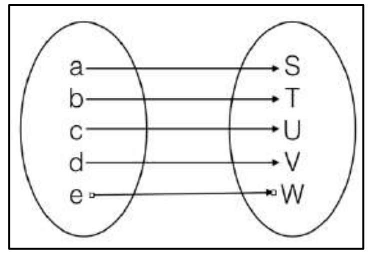
8. ¿Cuál es punto donde inicia la gráfica y qué representa en el fenómeno crecimiento?

9. ¿Qué figura tiene la gráfica resultante?

PARA REFLEXIONAR

Las funciones matemáticas son una representación de la realidad, así también estas pueden estar representadas de diversas formas, mediante un lenguaje simbólico, un lenguaje numérico, un lenguaje gráfico y a través de notación de conjuntos.

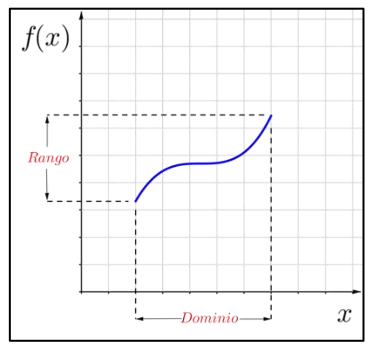
Existen muchos tipos de funciones, sin embargo, aquí se estudiarán sólo aquellas que servirán para cursos posteriores en tu formación académica. Dentro de los distintos tipos de funciones que podemos encontrar son: la función lineal, la función cuadrática, la función cúbica y la función exponencial.



A={(a,S), (b,T), (c,U), (d,V), (e,W)}

En el caso de matemáticas en contexto 3.2. el caso del crecimiento de un bebé ¿Qué tipo de función es?.

Podemos concluir que una función ***f*** es una relación entre un conjunto dado "*x*" denominado dominio y otro conjunto de elementos "f(x)" llamado como codominio, contradominio o rango, de forma que a cada elemento *x* del dominio le corresponde uno y sólo un elemento del codominio "*f(x)*".



Como se ha visto en los capítulos anteriores, la función lineal es base importante para la modelación matemática de fenómenos físicos, químicos, sociales entre otros, esta es representada de la forma *f(x)=mx+b*, con *m≠0*, esto es, que el parámetro ***b*** es el corte sobre el eje de las ordenadas. El corte de la función ***f*** sobre el eje de las abscisas está determinado por ***– (b/m)***.

Con la información anterior se pueden graficar las funciones lineales, por ejemplo:

f(x)=2x+3 → y=2x+3

Los cortes en los ejes son:

Eje de las abscisas	Eje de las ordenadas
x= –(3/-2) ó x=–1.5	*y=3*

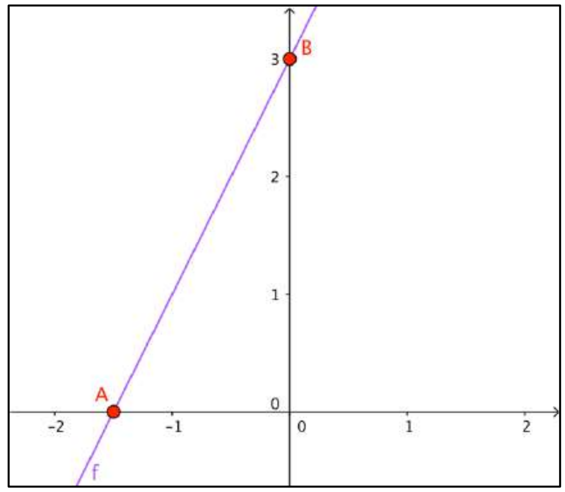


FIGURA 2. FUNCIÓN F A PARTIR DE LOS PUNTOS A Y B

por lo tanto, los puntos que corresponden a los cortes sobre los ejes son: A(1.5,0) y B(0,3)

Su gráfica correspondiente es como se muestra en la *Figura 2*. De manera análoga se puede determinar a partir de una gráfica la función de ésta.

Dada una función lineal *f* (*Figura 2*) que pasa por los puntos *A* y *B* con coordenadas *(*X_1*,0)* y *(0,*Y_2*)* respectivamente[1], se tiene que la pendiente de la función está determinada por $-\left(\frac{Y_2}{X_1}\right)$, y el término independiente por Y_2. Si los puntos *A* y *B* tienen coordenadas *(0,0)*, la pendiente de la recta está definida por un tercer punto *C*, el cual puede encontrarse en alguno de los cuatro cuadrantes. La comprobación de esto se deja al lector.

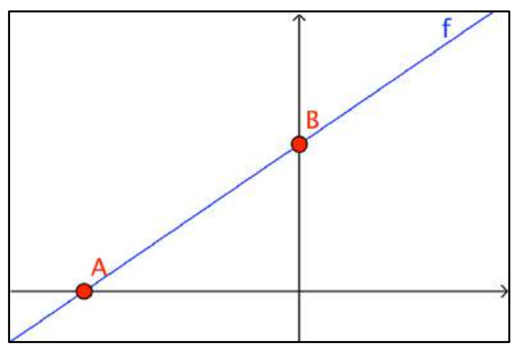


FIGURA 3. FUNCIÓN F QUE PASA POR A Y B

Otra forma de verlo es: la intersección entre el eje de las ordenadas y la función representa al valor independiente (***b***) y, para el cálculo de la pendiente (***m***) es el cociente de las intersecciones de la función ***f*** con el eje de las ordenadas y el de las abscisas.

[1] Es a bien señalar que los puntos *A* y *B* pueden estar localizados en cualquier parte de los ejes coordenados, y se leerán de izquierda a derecha para su generalización.

Con lo anterior se puede definir la función de una gráfica que pasa por dos puntos, por ejemplo, dada la gráfica de la *Figura 3*, determinar su función si las coordenadas de los puntos *A* y *B* son (0,-2) y (3.5,0) respectivamente, determina la función ***f*** que pasa por ambos puntos.

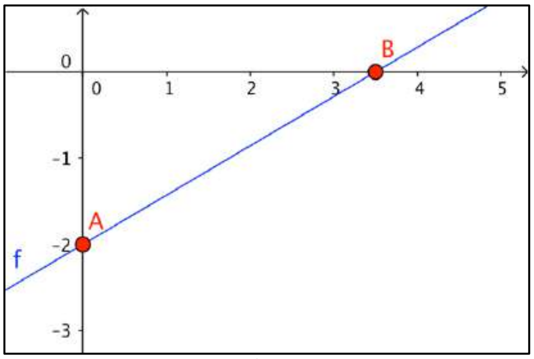


GRÁFICO.

Definiendo los parámetros *m* y *b* de la función *f(x)=mx+b*.

m= $-\left(\frac{-2}{3.5}\right) = \frac{2}{3.5} = 0.57$

b= -2

la función *f* está definida como: *f(x)=0.57x–2*

EJERCICIOS PROPUESTOS

I. INSTRUCCIONES: Dados dos puntos sobre los ejes coordenados, determina la función que pasa por ellos.

1. *A(1,0)*
   B(0,1)
   f(x)=

2. *A(5,0)*
   B(0,-3)
   f(x)=

3. *A(0,0)*
   B(0,0)
   C(8,5)
   f(x)=

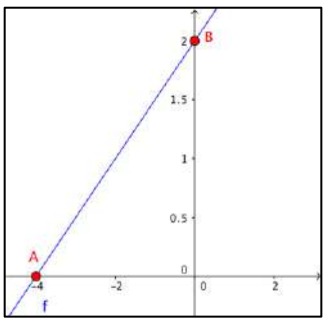
4. *A(-5,0)*
   B(0,-3/2)
   f(x)=

5. *A(0,5/2)*
   B(5/3,0)
   f(x)=

6. *A(0,0)*
   B(0,0)
   C(-4,2)
   f(x)=

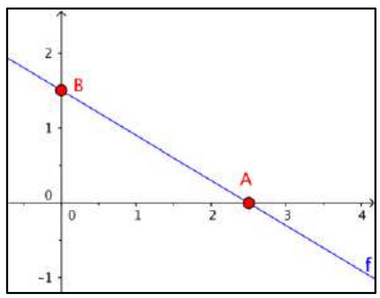
II. **INSTRUCCIONES**: Dados los siguientes gráficos, determinar la función que corresponde en cada una.

1



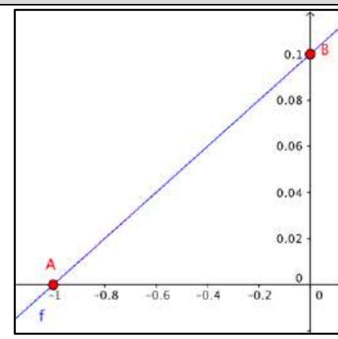
f(x)=

2



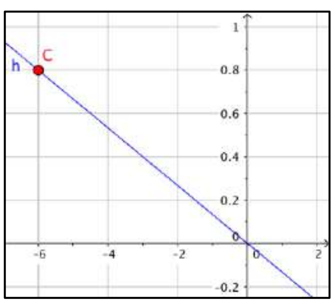
f(x)=

3



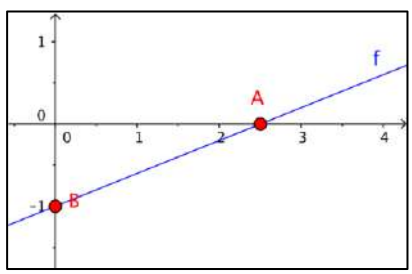
f(x)=

4



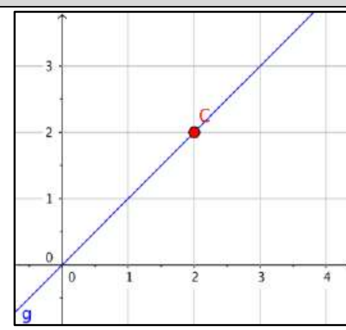
h(x)=

5



f(x)=

6



g(x)=

CAPÍTULO 4

INTRODUCCIÓN A LA MODELACIÓN MATEMÁTICA

A MANERA DE INTRODUCCIÓN:

Las previsiones del tiempo y los pronósticos económicos, están basados en modelos matemáticos. Su éxito o fracaso depende de la precisión con la que se construya esta representación numérica y la fidelidad con la que se concreticen hechos o situaciones naturales en forma de variables relacionadas entre sí.

A través de las funciones podemos modelar matemáticamente un fenómeno de la vida real, describir y analizar relaciones de hechos sin necesidad de hacer a cada momento una descripción verbal o un cálculo complicado de cada uno de los sucesos que estamos describiendo.

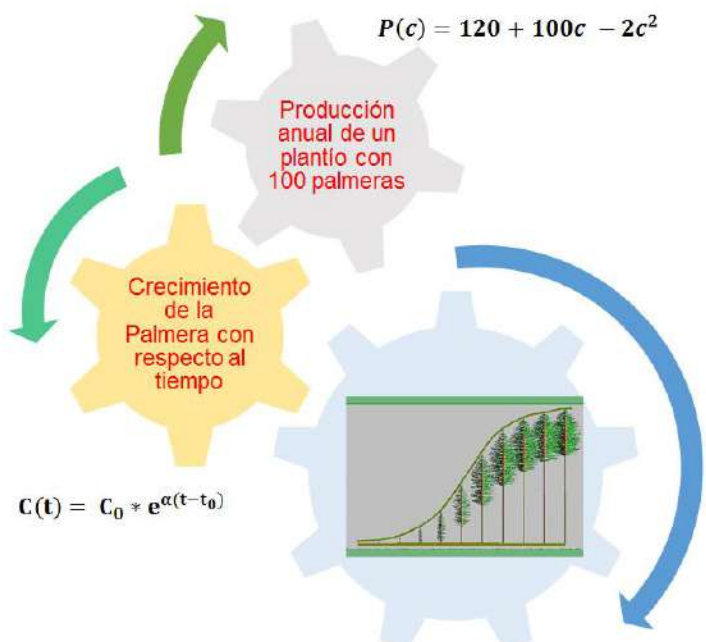


Figura 4.1 Crecimiento de la palmera

Como puede observarse en la figura 4.1, el crecimiento de las palmeras puede describirse de diferentes maneras, algunas de ellas es el crecimiento individual, la otra el crecimiento de un plantío, aunque esto no signifique que no puedan describirse otro tipo de relaciones entre las diferentes partes de la palmera.

MATEMÁTICA EN CONTEXTO 4.1.

EL CASO DE LA UTILIDAD

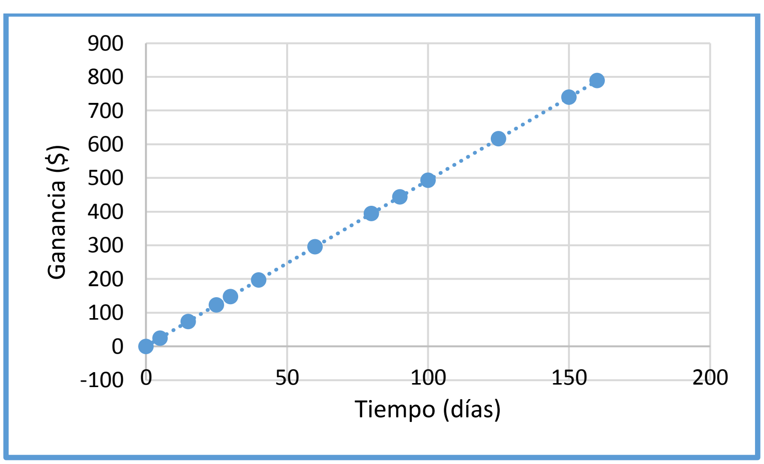
¿Qué banco me da más utilidad?

Tres instituciones bancarias me brindan diferentes planes de inversión para un capital inicial de $30 000.00, las cuales pueden ser representadas de las siguientes maneras:

Banco A

Tiempo (Días)	Ganancia $
0	0
5	20.55
15	61.64
25	102.74
30	123.29
40	164.38
60	246.58
80	328.77
90	369.86

Banco B



Banco C

$$G = 4.5205t$$

1. ¿Qué tipo de lenguaje matemático se utilizó en cada representación?
2. ¿Cuál es la utilidad proporcionada por cada banco, después de 18 días?

Banco A: _________________

Banco B: _________________

Banco C: _________________

2. ¿Cuáles son las utilidades individuales de cada banco a los 45 días?

Banco A: _________________

Banco B: _________________

Banco C: _________________

3. ¿En qué tiempo otorgarán una utilidad de $300 cada banco?

Banco A: _________________

Banco B: _________________

Banco C: _________________

4. Describa el comportamiento de la utilidad generada en el banco A entre $t = 5$ y $t = 10$ días

5. ¿Qué información me brinda cada una de las representaciones de capital generado por cada uno de los bancos?

6. ¿Qué información se pude predecir al visualizar el comportamiento de la gráfica?

7. ¿Es posible que con la tabla de datos pueda predecir situaciones del capital otorgado de manera fácil, como en el caso de la gráfica?, ¿Por qué?

PARA REFLEXIONAR

Resolver un problema real generalmente es muy complicado y no se sabe por dónde empezar. Esto se debe, entre otras cosas, a que los elementos que en él intervienen son numerosos. También influye que las relaciones entre estos elementos no son evidentes. Por consiguiente, es difícil expresar numéricamente el problema en forma clara. ¿Cómo podría encontrarse la solución de un problema que no se comprende?

Una forma de abordar un problema es la siguiente: primero, descubrir sus componentes; a continuación, elegir entre ellos los elementos más importantes, desechando aquellos que no juegan un papel preponderante. Después, buscar las relaciones entre estos elementos. Por último, seleccionar algunos objetos o símbolos que permitan representar la situación simplificada. A esta representación del problema se le denomina: **modelo.**

La naturaleza del modelo construido depende de los elementos que se elijan para conformarlo. El modelo puede ser un dibujo, una fotografía, un mapa, una gráfica, una red, etc., o expresiones matemáticas. Al representar en forma matemática los elementos y relaciones que intervienen en un problema, se tienen algunas ventajas: permite la utilización de los instrumentos matemáticos ya desarrollados en la consecución de una solución y proporciona una manera sistemática, explícita y eficiente de encontrarla. Asimismo, permite evaluar distintas soluciones factibles y tomar la mejor decisión. También es útil para predecir y comparar el comportamiento de la situación representada frente a diferentes alternativas o en diferentes momentos.

Además, un modelo matemático está basado en la lógica matemática, cuyos elementos son esencialmente **variables y funciones**, y las relaciones entre ellas, que vienen expresadas a través de relaciones matemáticas como: ecuaciones, inecuaciones, operadores lógicos, entre otros; que se empatan con las correspondientes relaciones del mundo real que modelizan (relaciones tecnológicas, leyes físicas, restricciones, principalmente).

Todo proceso de modelación comienza en el mundo real con una situación problemática, ya sea en un país, en una empresa, en su casa o incluso en su próximo viaje de vacaciones. Usted, por ejemplo, puede estar interesado en responder a alguna de las siguientes preguntas: ¿cómo evoluciona la economía del país?, ¿a quién se le deben asignar los recursos para llevar a cabo una tarea?, ¿dónde se debe invertir un capital?, ¿cómo se propaga una epidemia?, ¿cómo crece una población de conejos?, ¿cómo se comporta el tráfico automotriz en un sector de la ciudad?

Una manera de modelar matemáticamente es:

1. Observar el fenómeno a modelar.
2. Construir una tabla de los datos obtenidos durante la observación, en la que esté de manera clara, cuál es la variable independiente y cuál la dependiente.
3. Hacer un gráfico con los pares de datos de la tabla obtenida en el paso 2.
4. Analizar su comportamiento y proponer la función que mejor se ajuste a la curva resultante.

Esquemáticamente el proceso de modelación puede presentarse de la manera siguiente:

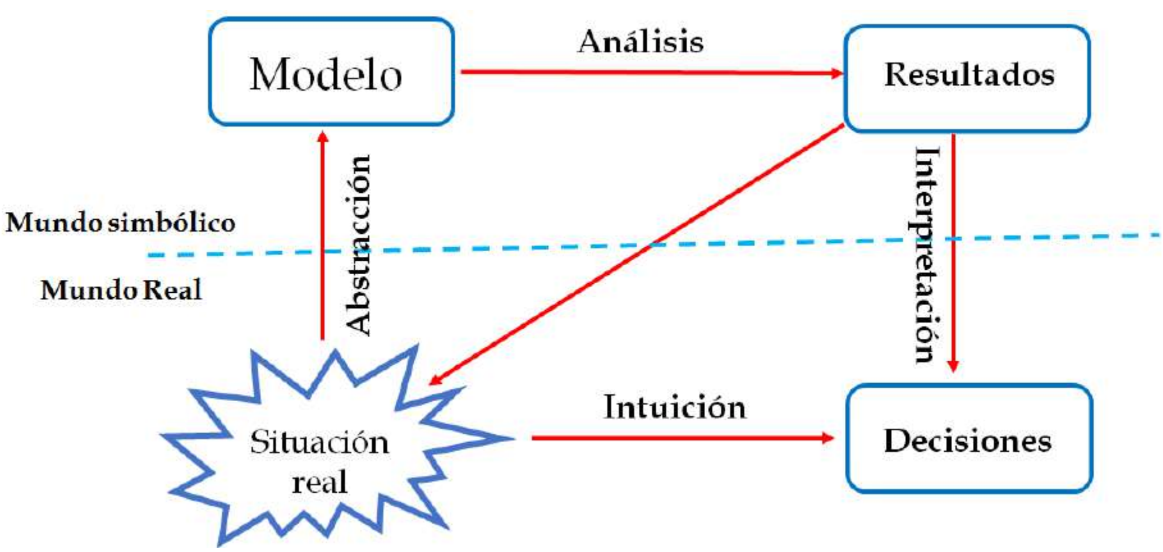


Figura 4.2. El proceso de modelación

De acuerdo a lo anterior y según tu perfil profesional ¿Cuál sería una aplicación de los modelos matemáticos?

Por ejemplo, para el médico veterinario, los modelos son un medio indispensable para explicar y predecir patrones de ocurrencia y brotes de enfermedades; en epidemiología son una herramienta útil para la investigación de enfermedades donde la experimentación y las observaciones en terreno son impracticables.

Completa la tabla que refiere a los elementos del modelo relacionado con tu profesión.

Elementos	Descripción
Parámetros	
Variables	
Relaciones funcionales	

Una característica importante de la modelación es que es una práctica que articula dos entidades, con la intención de intervenir en una de ellas a partir de la otra. La diversidad, tanto de las entidades que intervienen en la articulación como de la naturaleza de la intervención, hacen posible identificar a la modelación como una práctica recurrente en diferentes comunidades (Arrieta, Díaz, 2015).

MATEMÁTICA EN CONTEXTO 4.2

EL CASO DEL RESORTE

En un laboratorio se realiza una práctica sobre resortes, la imagen ilustra tal situación:

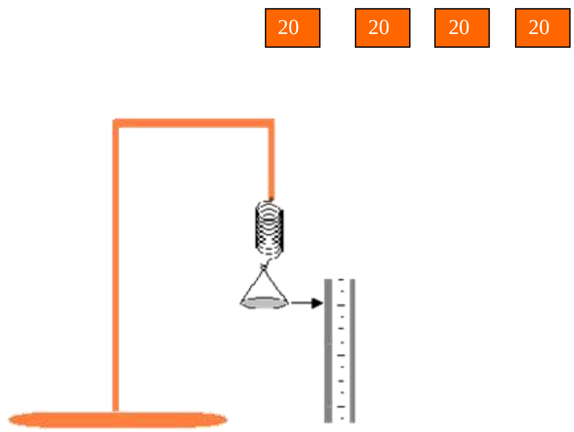


FIGURA 4.3. ESTIRAMIENTO DE UN RESORTE

(Arrieta y Díaz, 2015)

Al agregar pesas en el portapesas se obtuvieron los datos siguientes:

Tabla 4.1. Peso acumulado y longitud del resorte.

Peso (gr)	Longitud del Resorte (cm)
0	45
20	75
40	105
60	135
80	165
100	195
120	225
140	255

Con base en los datos anteriores, responde lo siguiente:

1. ¿Cuál es la longitud del resorte cuando el peso es de 50 gramos? ¿Por qué?

2. ¿Cuál es la longitud del resorte cuando el peso es de 35 gramos? ¿Por qué?

3. ¿Cuál es la longitud del resorte cuando el peso es de 48?4 gramos? ¿Por qué?

Si se grafican los datos de la tabla 4.1 se obtiene lo siguiente:

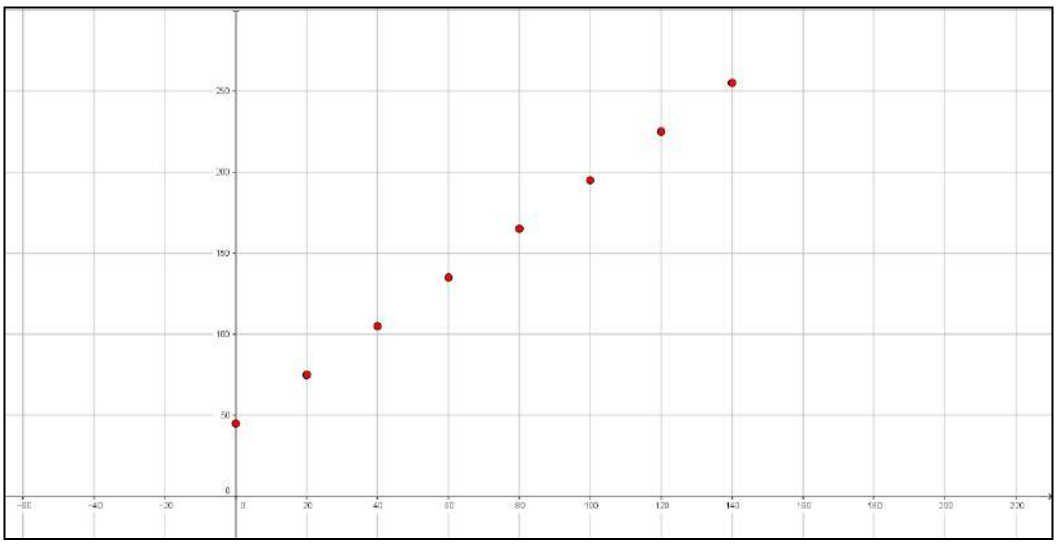


Figura 4. 4. Parejas de datos longitud del resorte contra el peso

4. ¿Qué función representa los puntos en el plano cartesiano?

5. ¿Cuál sería el modelo algebraico?

PARA REFLEXIONAR

Llamaremos modelos lineales a aquellas situaciones que después de haber sido analizadas, se representan por medio de una función lineal.

La ecuación general es de la forma: $f(x) = y = mx + b$

En algunos casos nuestro modelo coincide precisamente con una recta; en otros casos, a pesar de que los pares de puntos que nos interesan no pertenecen todas a la misma línea, es posible encontrar una función lineal que mejor se aproxime a nuestro problema, ayudándonos a obtener información valiosa.

MATEMÁTICA EN CONTEXTO 4.3

EL CASO DE LA PRESIÓN ARTERIAL VS CONSUMO DE SAL

Se quiere estudiar la asociación entre consumo de sal y tensión arterial. A una serie de voluntarios se les administra distintas dosis de sal en su dieta y se mide su tensión arterial un tiempo después.

Variable x: gr. de sal diarios

Variable y: presión arterial en mm de Hg

x (sal)	y (Presión)		x (sal)	y (Presión)
1.0	92.71		3.0	105.38
1.2	93.97		3.5	110.0
1.4	95.24		3.6	109.1
1.6	96.51		4.0	110
1.8	100.0		4.3	112.0
2.0	99.04		4.6	115.51
2.2	98		4.8	116.78
2.8	104.4		5.0	120.0

Buscaremos un modelo que represente el comportamiento descrito, para ello primeramente graficaremos:

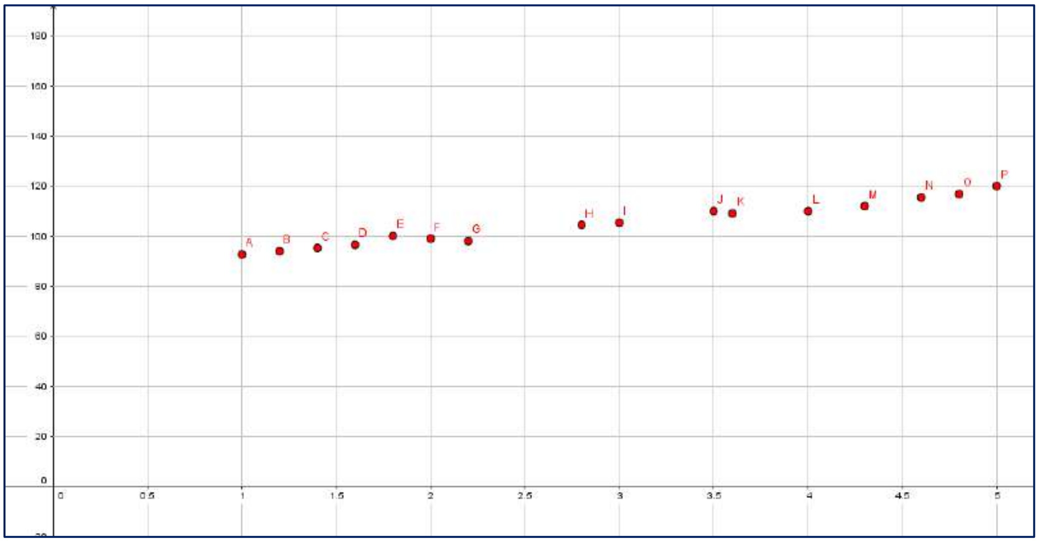


Figura 4.5 Datos del efecto de la ingesta de sal en la presión sanguínea

¿Con que tipo de función puedes asociar el comportamiento de los puntos en la gráfica? Explica por qué.

¿Cómo puedes representar el comportamiento mediante una función?

Argumenta

Para determinar los parámetros m y b del modelo lineal que da cuenta de los datos del fenómeno analizado, estos deben determinarse a partir del gráfico. Nota: La recta que mejor se ajusta a estos datos, se puede trazar por diferentes caminos, utilizando el método de los mínimos cuadrados, o el método de los promedios, por mencionar algunos.

MATEMÁTICA EN CONTEXTO 4.4.

EL CASO DE LA VISITA AL SUPERMERCADO

Retomemos ahora la situación planteada de la visita el supermercado en el Capítulo 1.

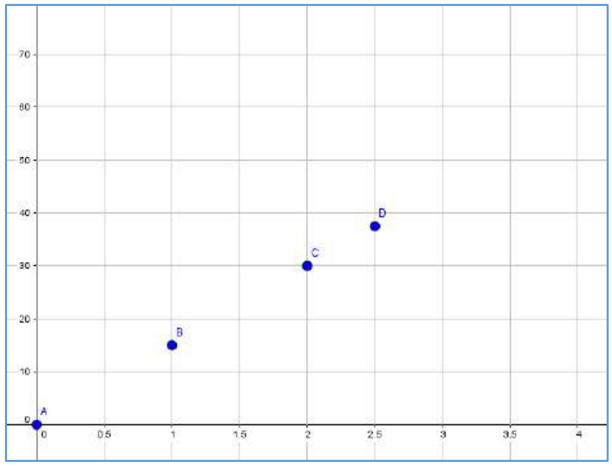
Una de las actividades que se te plantearon consistió en llenar la tabla siguiente:

Completa la siguiente tabla

Kg	$
0	0
1	15
1.5	22.5
2	30
2.5	37.5
n	15*n

Con toda seguridad las columnas 1 y 3 quedaron como la anterior, también se te solicito que realizaras una gráfica con los datos anteriores:

Tu gráfico quedo como



A la pregunta, ¿Qué "figura" encuentras? Contestase una línea recta. Ahora nos planteamos cual es la ecuación (modelo) que la representa. Procedemos como esta descrito anteriormente

	Kg x	$ y	xy	x2
	0	0	0	0
	1	15	15	1
	1.5	22.5	33.75	2.25
	2	30	60	4
	2.5	37.5	93.75	6.25
Suma =	7	105	202.5	13.5
Promedio =	1.4	21	40.5	2.7

Sustituyendo en las ecuaciones, tenemos:

$y = ax + b$ ⟹ $1.4\,a + b = 21$

$xy = ax2 + bx$ ⟹ $2.7\,a + 1.4\,b = 40.5$

Resolviendo el sistema, se tiene que $a = 15$ y $b = 0$

Con lo que el modelo lineal puede representarse por:

$$f(x) = 15\,x$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

INSTRUCCIONES: Resuelve los siguientes problemas

1. Se realizó un experimento para observar el proceso que lleva la semilla de frijol al germinar con el paso del tiempo y para observar los cambios fisiológicos que lleva esta misma.

Antes de realizar el experimento se dejó remojando las semillas 48hrs.

El lunes 30 de agosto se sembraron las semillas, colocando la misma cantidad de tierra en los doce vasos, procediendo a colocar las semillas de frijol a una profundidad regular humedeciendo la tierra.

Los primeros dos días el frijol aumento su tamaño de forma notoria, al tercer día la semilla se expandió y saco la radícula.

Al día siguiente el grano se dividió en 2 y va tomo un color verde; durante el quinto la planta saco sus primeras raíces y su tallo comenzó a crecer, en el sexto día, al séptimo día la planta ya tenía hojas y raíz bien formada.

La germinación del frijol pasó por las siguientes fases: Fase de hidratación, Fase de germinación, Fase de crecimiento

Figura 4.11. Crecimiento de la planta de frijol

Los resultados se registraron mediante tablas, utilizando las variables de peso y crecimiento de tallo.

Los datos de la primera tabla representan el peso en gramos del frijol sometido a dos tratamientos (T1, T2) diferentes durante una semana con datos tomados durante cada uno de los días.

Tiempo Tratam	0	1	2	3	4	5	6	7
T1	0.2	0.3	0.52	1.0	1.65	2.6	3.0	**3.5**
T2	**0.2**	**0.4**	**0.6**	**1.1**	**1.75**	**2.5**	**3.1**	**3.8**

Utilizando cualquiera de los procedimientos descritos, obtenga el modelo que representa el aumento en peso de la planta de frijol con respecto al tiempo.

Modelo para el tratamiento 1. Escribe el procedimiento

Modelo para el tratamiento 2. Escribe el procedimiento

Con base en los datos de la tabla y los modelos obtenidos, que representa la pendiente:

Suponiendo que el crecimiento después del día siete sigue el mismo comportamiento, cuál es el peso de la planta de frijol después de 20 días:

T1:

T2:

2. La tabla da las alturas ganadoras en las competencias olímpicas de salto con pértiga masculinas hasta el año 2004.

Año	Altura (m)
1896	3.30
1900	3.30
1904	3.50
1908	3.71
1912	3.95
1920	4.09
1924	3.95
1928	4.20
1932	4.31
1936	4.35
1948	4.30
1952	4.55
1956	4.56

Año	Altura (m)
1960	4.70
1964	5.10
1968	5.40
1972	5.64
1976	5.64
1980	5.78
1984	5.75
1988	5.90
1992	5.87
1996	5.92
2000	5.90
2004	5.95

a) E labore una gráfica de dispersión y decida si es apropiado un modelo lineal.

b) Encuentre y grafique la recta de regresión.

c) Utilice el modelo lineal para predecir la altura del salto ganador con pértiga en los Juegos Olímpicos de 2008 y compárelo con el salto ganador real de 5.96 metros.

d) ¿Es razonable utilizar el modelo para predecir la altura ganadora en los Juegos Olímpicos de 2100?

3. Un vendedor de piso de aparatos de uso doméstico tiene un sueldo diario base de $100.90 (Secretaría de Trabajo y Previsión Social), pero por cada aparato recibe un comisión adicional de $15.00. Elabore una tabla que represente el sueldo obtenido por el vendedor suponiendo que puede vender hasta 10 aparatos diarios:

Aparatos Vendidos	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Sueldo	110.9	125.9									

Obtenga el modelo matemático que represente los datos anteriores.
¿Cuántos aparatos requiere vender para tener un ingreso total de $300

4. Encuentre un modelo que ajuste los siguientes datos que relacionan la altura de un grupo de niños con la edad del mismo:

Edad (años)	1	3	5	7	9	11	13
Altura (cm)	75	92	108	121	130	142	155

Con base en el modelo, ¿Cuánto medirá a los 8 años? ¿a qué edad tendrá una altura de 165cm?

5. Una fábrica de calzado creada en 1990, ha aumentado en número de operarios como se muestra en la tabla siguiente:

Año	1990	1995	2000	2005	2015
Empleados	150	202	270	430	510

Elabore un modelo que represente el incremento en número de operarios.

Con base en el modelo, ¿cuál era el número de operarios en 2002?

¿Suponiendo que la empresa siga creciendo, cuántos operarios serán en 2017?

BIBLIOGRAFÍA

Arrieta, J. (2003). Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula. Disertación doctoral publicada, Cinvestav, México.

20 minutos. (2014). La presión arterial sistólica y diastólica tienen diferentes consecuencias sobre la salud. Recuperado el 24 de marzo de 2017 de http://www.20minutos.es/noticia/2155581/0/presion-arterial/hipertension-consecuencias/sistolica-diastolica/

Arrieta, J., Díaz L. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la socioepistemología. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2015) 18 (1): 19-48

Arrieta, J., y Díaz L. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la Socioepistemología. Relime [online]. 2015, vol.18, n.1, pp.19-48. ISSN 2007-6819. http://dx.doi.org/10.12802/relime.13.1811.

Biembengut, M. y Hein, N. (1997). Modelo, modelación y modelaje: métodos de enseñanza-aprendizaje de matemáticas. Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales", 38,209-222.

Boyer, M., J. (1998) Matemáticas para enfermeras. Guía de Bolsillo para cálculo de dosis y preparación de medicamentos. Traducción Dr Ignacio de Jesús Monteón Edditrial El Manula Moderno México.

Crilly, T. (2007). "50 Cosas que hay que saber sobre Matemáticas", Ed. Planeta. España.

Díaz y Font, (2003). Razonamiento Algebraico y su didáctica para maestros. Recuperado de https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/7_Algebra.pdf el 26 nov. 17

Méndez, M. (2008). La experiencia como la evolución de las prácticas: La experiencia de modelar linealmente situaciones análogas (Tesis de Maestría no publicada). Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero, México.

Mendoza, G. (2002). Introducción al Análisis de Datos utilizando R y Excel. 2016. Universidad Nacional de Colombia. Recuperado el 24 de marzo de 2017 de http://168.176.60.11/cursos/ciencias/2007315/index.html

Patricia Molinàs Mata (pmolinas@uoc.edu), José Francisco Martínez Boscá (jmartinezbos@uoc.edu) ubicado en https://www.uoc.edu/in3/emath/docs/Sucesiones.pdf

Sillero, J. (2008). Patología cardiovascular en el paciente renal crónico. Seminario Médico. Vol. 60. Pp 101 – 112.

Yampufé, C. (2009) "Apuntes Acerca del Pensamiento Matemático", Perú. Encontrado en http://carlosyampufe.blogspot.mx/2009/05/apuntes-acerca-del-pensamiento.html