Matrices y Software R

AUTORES:

- CASTILLO MÁRQUEZ DALIA IMELDA
- PARTIDA LÓPEZ GEORGINA ELIZABETH
- MENDOZA REYES SAYDAH MARGARITA
- GÓMEZ DÁVALOS ARTURO JAVIER

Universidad Tecnocientífica del Pacífico S.C.

UTP

Transformando con Ciencias

Editorial

Matrices y Software R

Matrices y Software R

Matrices y Software R, es una publicación editada por la Universidad Tecnocientífica del Pacifico S.C.

Calle Morelos, 377 Pte. Col. Centro, CP: 63000. Tepic, Nayarit, México.

Tel. (311) 441-3492.

https://www.editorial-utp.com/

https://libros-utp.com/index.php/editorialutp/index

Registro RENIECYT: 1701267

ISBN:

978-607-8759-43-9

Este libro fue evaluado por pares a doble ciego.

Autores

- *Castillo Márquez Dalia Imelda*
- *Partida López Georgina Elizabeth*
- *Mendoza Reyes Saydah Margarita*
- *Gómez Dávalos Arturo Javier*

Equipo editorial y edición

- ***Editor***

Elsa Jazmín Lugo-Gil

Universidad Tecnocientífica del Pacifico S.C.

CONTENIDO

UNIDAD 1. MATRICES

1.1 ¿Dónde surgieron las matrices?

De acuerdo con Rosales (2009), los comienzos de las matrices y los determinantes datan del siglo II a.C, aunque hay indicios desde IV siglos a. C, sin embargo, no fue hasta fines del siglo XVII que las ideas reaparecieron y se desarrollaron con fuerza. Los comienzos de las matrices y los determinantes surgen a través del estudio de sistemas de ecuaciones lineales. En Babilonia se estudiaron problemas que involucraban a ecuaciones lineales simultáneas y algunos de estos son conservados en tabletas de arcilla que permanecieron en el tiempo. Por ejemplo, una tableta que data alrededor de 300 años a. C, contiene el siguiente problema:

Hay dos terrenos cuya área total es de 1800 metros cuadrados. Uno produce granos en una proporción de 2/3 de una medida por yarda cuadrada mientras el otro produce granos en una proporción de 1/2 de una medida por metro cuadrado. Si la producción total es 1,100 medidas, ¿Cuál es el tamaño de cada terreno?

Entre los años 200 y 100 a.C aparece en China el libro *Nueve Capítulos sobre el Arte Matemático,* escrito durante la dinastía Han, que da el primer ejemplo conocido de método matricial. El problema es parecido al anterior:

Hay tres tipos de trigo, de los que tres sacos del primero, dos del segundo y uno del tercero hacen 39 medidas, dos del primero, tres del segundo y una del tercero son 34 medidas; una del primero, dos del segundo y tres del tercero son 26 medidas. ¿Cuántas medidas de cada tipo de trigo contiene un saco?

El autor distribuye los coeficientes en una tabla e instruye como resolverlo con operaciones por columnas en lo que puede suponer el germen del método de Gauss.

1	*2*	*3*
2	*3*	*2*
3	*1*	*1*
26	*34*	*29*

El autor dice que multiplicando la primera columna por tres y restándola de la tercera es el camino más rápido, así como, multiplicar la columna central por tres y restarla de la de la derecha las veces posibles:

0	*0*	*3*
4	*5*	*2*
8	*1*	*1*
39	*24*	*39*

El siguiente paso es multiplicar por 5 la última columna y entonces la columna central es restada de ella las veces posibles.

0	*0*	*3*
0	*5*	*2*
36	*1*	*1*
99	*24*	*39*

De aquí se puede obtener la solución por sustitución.

El término matriz aparece, por primera vez hacia el año 1850, siendo introducidas por el inglés James Joseph Sylvester, quien definió las matrices como un *arreglo cuadrilongo de términos*. Sylvester observó como algunas matrices contenían dentro de ellas varios determinantes representados como arregles cuadrados. Así mismo, Cayley publicó en 1958 *Memoria sobre la teoría de Matrices,* donde introdujo la notación matricial, como forma abreviada de escribir un sistema de *m* ecuaciones lineales con *n* incógnitas.

Las matrices se utilizan para múltiples aplicaciones y sirven, en particular, para representar los coeficientes de los sistemas de ecuaciones lineales o para representar las aplicaciones lineales; en este último caso las matrices desempeñan el mismo papel que los datos de un vector para las aplicaciones lineales. Pueden sumarse, multiplicarse y descomponerse de varias formas, lo que también las hace un concepto clave en el campo del álgebra lineal.

1.2 ¿Qué es una matriz?

Las matrices y los determinantes son herramientas del álgebra que facilitan el ordenamiento de datos, así como su manejo. Una matriz es una tabla bidimensional de números en cantidades abstractas que pueden sumarse y multiplicarse.

Las matrices se utilizan para describir sistemas de ecuaciones lineales, y registrar los datos que dependen de varios parámetros. Las matrices se describen en el campo de la teoría de matrices.

Una matriz es un arreglo rectangular de números, que se encuentran ordenados en filas y columnas. De manera formal podemos decir que dado un conjunto X, se denomina matriz de un conjunto de n filas por m columnas a un conjunto de nxm dispuesto en un arreglo rectangular de n filas por m columnas. Denotaremos M_{nm} para nombrar el conjunto de todas las matrices de orden nxm (n filas por m comunas).

Ejemplos de matrices:

$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ Matriz es de 2 filas por 1 columna y su notación es A_{2x1}

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ Matriz es de 3 filas por 2 columnas y su notación es B_{3x2}

$C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ Matriz es de 3 filas por 3 columnas y su notación es C_{3x3}

1.3 Representación algebraica de una matriz

$$A=\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\text{Columnas de la matriz } A}\left.\begin{matrix} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \\ \\ \rightarrow \end{matrix}\right\} \text{Filas de la matriz } A$$

Las matrices se denotan con las letras mayúsculas (A), mientras cada uno de sus elementos se denota con la misma letra, pero en minúsculas acompañados de subíndices que indican la posición en la que se encuentran, el primer subíndice indica la fila y lo llamaremos (i) el segundo subíndice indica la columna y lo llamaremos (j).

1.4 Orden de una matriz:

Se llama orden de una matriz al número de filas por el número de columnas de dicha matriz.

Al elemento de una matriz que se encuentra en la fila i-ésima y la columna j-ésima se le llama elemento a_{ij} o elemento (i, j)-iésimo de la matriz. Se vuelve a poner primero las filas y después las columnas.

Abreviadamente se puede expresar **A = (aij)** cada elemento de la matriz lleva dos subíndices. El primero de ellos "i", indica la fila en la que se encuentra el elemento, y el segundo, "j", la columna.

Por ejemplo:

✍ La matriz A, tiene 2 filas y 2 columnas, entonces, su tamaño es (2x2).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

✍ La matriz B, tiene 2 filas y 3 columnas, entonces, su tamaño es (2x3).

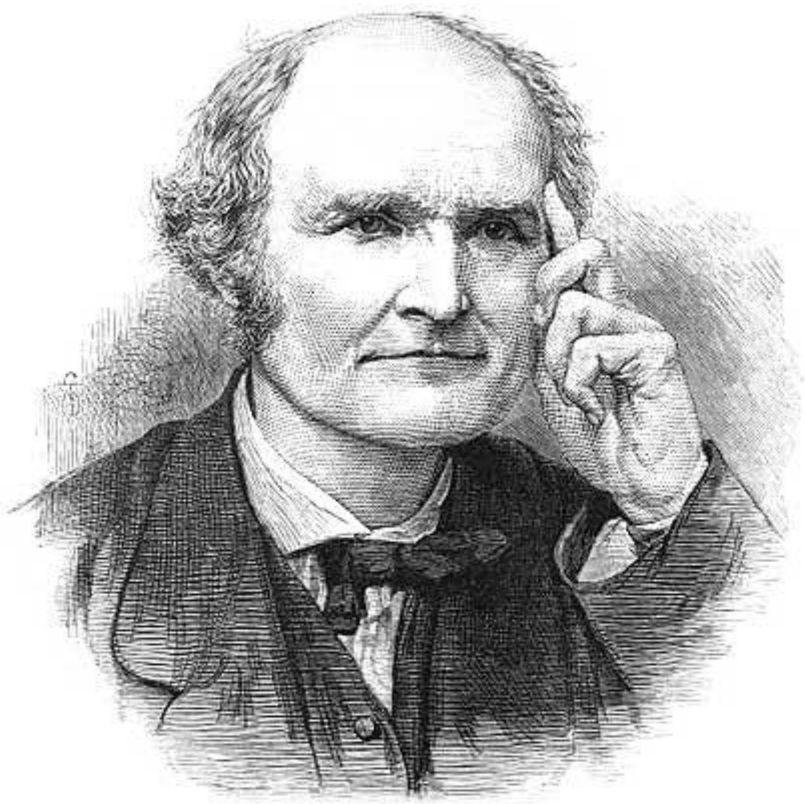
$$B = \begin{pmatrix} \sqrt{9} & -4 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

✍ La matriz C, tiene 3 filas y 3 columnas, entonces, su tamaño es (3x3).

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 15 \\ 1 & -6 & 8 \end{pmatrix}$$

1.5 Matemáticos que realizaron aportes al álgebra matricial

Figura 1:
Arthur Cayley



Fuente: Fernández y Tamaro, (2022).

Matemático inglés, desarrolló en 1857 el álgebra de matrices, es decir, las reglas que ilustran la forma en la cual se suman y multiplican las matrices. Nació en Richmond, en Surrey (cerca de Londres) y fue educado en el Trinity College, Cambridge, donde se graduó en 1842. Durante varios años estudió y ejerció la carrera de leyes, pero nunca dejo su práctica en la abogacía interfiriera con su trabajo en las matemáticas. Siendo estudiante de leyes viajó a Dublín y asistió a las conferencias de Hamilton sobre cuaterniones. Cayley está clasificado como el tercer matemático más prolífico en la historia; lo sobrepasan sólo Euler y Cauchy. Comenzó a publicar siendo todavía estudiante de la universidad en Cambridge.

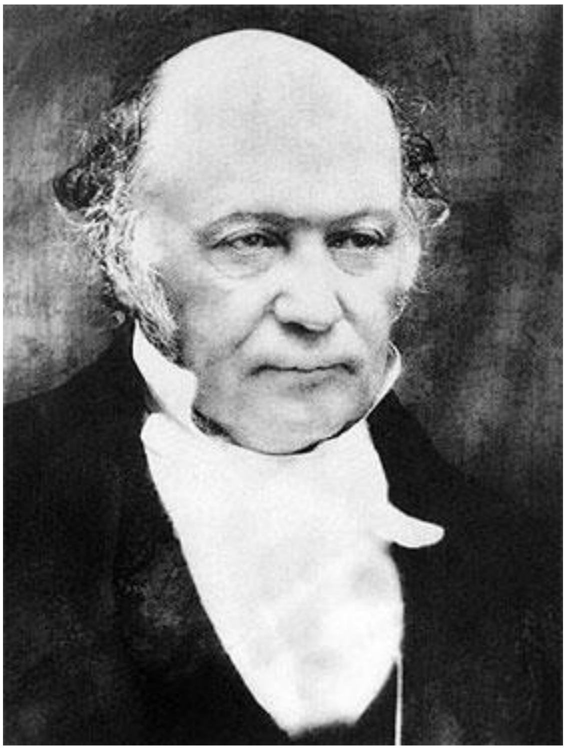
Durante sus años de abogado publicó entre 200 y 300 artículos y continuó su copioso trabajo a lo largo de toda su vida. La colección masiva *Collected Mathematical Papers de Carley* contiene 966 artículos y consta de 13 grandes volúmenes con un promedio de 600 páginas cada uno.

Cayley uno de los matemáticos más prolíficos de la historia. Cayley considerado como uno de los padres del álgebra lineal, introdujo el concepto de matriz y estudió sus diversas propiedades. Con posterioridad empleó estos resultados para estudiar la geometría analítica de dimensión *n*. En 1859 concluyó que la geometría métrica se encontraba incluida en la proyectiva, noción que recogería Félix Klein en su estudio de las geometrías no euclídeas. Entre 1854 y 1878 escribió diversos artículos en los que desarrolló por vez primera la teoría de los invariantes.

Además de desarrollar la teoría de matrices, Cayley fue pionero en sus contribuciones a la geometría analítica, la teoría de determinantes, la geometría de *n* dimensiones, la teoría de curvas y superficies, el estudio de formas binarias y la teoría de funciones elípticas.

Carley era, en el verdadero sentido de la tradición inglesa, un alpinista amateur e hizo varios viajes frecuentes al continente para realizar caminatas y escalar montañas. Cuenta la historia que decía que la razón por la que se unió al alpinismo fue que, aunque sentía que el ascenso era arduo y cansado, la gloriosa sensación de goce que lograba cuando conquistaba una cima era como el que experimentaba cuando resolvía un problema difícil de matemáticas o cuando completaba una teoría matemática intrincada.

Figura 2:
William Rowan Hamilton



Fuente: Fernández y Tamaro, (2022)

Hamilton nació en Dublín en 1805, en donde pasó la mayor parte de su vida, y fue sin duda el más grande matemático irlandés. A la edad de cinco años Hamilton podía leer inglés, hebreo, latín y griego. Aunque disfruto las matemáticas desde niño, el interés de Hamilton creció de manera importante después de un encuentro casual a la edad de 15 años con Zerah Colburn, el estadounidense que calculo las descargas eléctricas de los rayos. Poco después, Hamilton comenzó a leer libros importantes de matemáticas de su tiempo.

Realizó importantes contribuciones en dinámica y en óptica, inventó los cuaterniones y comercializó algún juego de ingenio que se convertiría después en una especialidad a desarrollar dentro de la teoría de grafos que había visto la luz con Euler y el famoso problema de “Los Siete Puentes de Könnisberg”.

La carrera universitaria de Hamilton fue sobresaliente. A los 21 años, siendo todavía estudiante de licenciatura, había impresionado a tal grado a sus maestros que fue nombrado Astrónomo Real de Irlanda y profesor de astronomía de la universidad. Poco después escribió lo que ahora se considera un trabajo clásico en óptica. Haciendo uso únicamente de la teoría matemática, predijo la refracción cónica en cierto tipo de cristales. Más tarde los físicos confirmaron esta teoría. En parte debido a este trabajo, Hamilton fue armado caballero en 1835.

El primer artículo puramente matemático de Hamilton apareció en 1833. En él describió una manera algebraica de manipular pares de números reales. Este trabajo sienta las reglas que usan hoy en día para sumar, restar, multiplicar y dividir números complejos.

Durante el resto de su vida, Hamilton pasó la mayor parte del tiempo desarrollando el álgebra de cuaterniones. Él suponía que tendría un significado revolucionario en la física matemática.

Su trabajo monumental sobre este tema, *"Treatise on Quaternions",* fue publicado en 1853. Más tarde trabajo en una extensión del tema, *"Elements of quaternions"*. Aunque Hamilton murió en 1865 antes de terminar la obra, su hijo publico el trabajo en 1866.

Figura 3.
James Joseph Sylvester

Fuente: Fernández y Tamaro, (2022)

James Joseph Sylvester (3 de septiembre de 1814-15 de marzo de 1897) fue un matemático británico conocido por sus logros en álgebra y matemáticas discretas. Hizo contribuciones fundamentales a la teoría de matrices, la teoría de invariantes, la teoría de números, la teoría de la divisibilidad, y el cálculo combinatorio. Colaboró con varias instituciones, incluyendo la Universidad Johns Hopkins en Baltimore y Oxford, y participó en la creación de la primera revista matemática en América. El cráter Sylvester en la Luna y el asteroide (13658) Sylvester llevan su nombre.

James Joseph, nació en una familia judía originaria de Liverpool. Hijo de Abraham Joseph, que murió cuando él era niño, James fue el sexto y más joven varón de nueve hijos, al menos cuatro de los cuales, más tarde asumieron el apellido Sylvester.

Hasta los quince años, James se educó en Londres, al principio en escuelas para niños judíos en Highgate y en Islington, y luego durante cinco meses en la Universidad de Londres (más tarde University College), donde conoció a Augustus De Morgan. En 1829 fue a la escuela de la Royal Institution, en Liverpool, donde obtuvo el primer premio en matemáticas por un inmenso margen y ganó un premio de $ 500, ofrecido por los Contractors of Lotteries de los Estados Unidos. En esta escuela fue perseguido por su fe hasta el punto de huir a Dublín. Allí, en la calle, conoció a R. Keatinge, un juez y primo de su madre, que arregló su regreso a la escuela.

En 1837, ocupó el segundo lugar en los exámenes matemáticos de la Universidad de Cambridge, pero, como judío, no pudo obtener su título o conseguir un cargo allí. En 1838 se convirtió en profesor de filosofía natural en el University College de Londres (la única universidad británica no sectaria). En 1841 aceptó una cátedra de matemáticas en la Universidad de Virginia, Charlottesville, EE. UU., pero renunció después de solo tres meses después de un altercado con un estudiante en el que la administración de la escuela no estuvo de su lado. Regresó a Inglaterra en 1843.

De 1855 a 1870, Sylvester fue profesor de matemáticas en la Royal Military Academy en Woolwich. Regresó a los Estados Unidos una vez más en 1876, para convertirse en profesor de matemáticas en la Universidad Johns Hopkins en Baltimore, Maryland. Mientras estuvo allí fundó (1878) y se convirtió en el primer editor del *American Journal of Mathematics*, introdujo el trabajo de posgrado en matemáticas en universidades estadounidenses y estimuló enormemente la escena matemática estadounidense. En 1883 regresó a Inglaterra para convertirse en profesor Saviliano de Geometría en la Universidad de Oxford.

1.6 Clasificación de matrices

La clasificación de matrices se establece a partir de cómo se organizan sus valores en las filas y columnas, para abarcar todas las posibilidades existe una larga lista, Empecemos.

Matriz nula.

Es aquella matriz cuyos elementos son todos nulos.

Ejemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz fila.

Se llama matriz fila a la que sólo tiene una fila, es decir su dimensión es *(1xn)*.

Ejemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & \pi & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{C}= (0,1,0,\sqrt{2})$$

Matriz columna.

Se llama matriz columna a la que sólo consta de una columna, es decir su dimensión será *(mx1).*

Ejemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ \sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Matriz cuadrada.

Una matriz es cuadrada cuando tiene el mismo número de filas que de columnas, es decir su dimensión es *(nxn).*

Ejemplos:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \\ 5 & 4 & 7 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Matriz rectangular.

Una matriz es rectangular si no es cuadrada, es decir, tiene diferente número de filas que de columnas.

Ejemplo:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Matriz diagonal.

Es una matriz cuadrada donde los elementos que no están en la diagonal principal son todos nulos. Se trata de una matriz que es simultáneamente matriz triangular superior e inferior.

Ejemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Matriz triangular superior.

Una matriz es triangular superior si todos los elementos por debajo de la diagonal principal son nulos.

$$F = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}$$

Matriz triangular inferior.

Es triangular inferior si son nulos todos los elementos situados por encima de dicha diagonal. Es ejemplo de estas matrices:

$$\text{G}=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 6 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Matriz diagonal.

En una matriz diagonal todos los elementos situados por encima y por debajo de la diagonal principal son nulos.

$$H = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}$$

Matriz escalar.

Una matriz es escalar si es diagonal y además todos los elementos de la diagonal son iguales.

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

Matriz Identidad.

Si una matriz diagonal tiene en su diagonal principal sólo unos, se denomina matriz unidad o identidad. Se suelen representar por In.

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.7 Matrices especiales.

Matriz Idempotente Una matriz, A, es idempotente si: $\mathbf{A^2 = A}$
Matriz Involutiva Una matriz, A, es involutiva si: $\mathbf{A^2 = I}$
Matriz Simétrica Una matriz simétrica es una matriz cuadrada que verifica: $\mathbf{A = A^t}$
Matriz Antisimétrica Una matriz antisimétrica o hemisimétrica es una matriz cuadrada que verifica: $\mathbf{A = -A^t}$.
Matriz Ortogonal Una matriz es ortogonal si verifica que: $\mathbf{A \cdot A^t = I}$.

Matriz conjugada

Matriz conjugada Sea A una matriz de números complejos. Si se reemplaza cada elemento por su complejo conjugado se obtiene $\overline{A}$ que sea su matriz conjugada.

Matriz hermitiana

Se dice que una matriz de números complejos cuadrada es hermitiana, denotada como A^*, si es igual a su propia transpuesta conjugada: $A = \overline{-A}^T = A^*$

Matriz Inversa

La inversa de una matriz está definida como aquella matriz, que multiplicada por la original da por resultado la matriz identidad, se denota como A^{-1}

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$$

UNIDAD 2. OPERACIONES CON MATRICES

2.1 Suma o resta de matrices

Para sumar o restar dos matrices del mismo tamaño, se suman o restan los elementos que se encuentren en la misma posición, resultando otra matriz de igual tamaño dada por:

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{a}_{ij}+\boldsymbol{b}_{ij})=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} & \cdots & \boldsymbol{a}_{1m}\\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} & \cdots & \boldsymbol{a}_{2m}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \boldsymbol{a}_{n1} & \boldsymbol{a}_{n2} & \cdots & \boldsymbol{a}_{nm}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_{11} & \boldsymbol{b}_{12} & \cdots & \boldsymbol{b}_{1m}\\ \boldsymbol{b}_{21} & \boldsymbol{b}_{22} & \cdots & \boldsymbol{b}_{2m}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \boldsymbol{b}_{n1} & \boldsymbol{b}_{n2} & \cdots & \boldsymbol{b}_{nm}\end{pmatrix}$$

$$A+B=\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1m}+b_{1m}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2m}+b_{2m}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{nm}+b_{nm}\end{pmatrix}$$

Es decir, la matriz resultante de $(\boldsymbol{nxm})$ $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ es la suma del elemento (1,1) de la matriz $\boldsymbol{A}$ con el elemento $(\mathbf{1},\mathbf{1})$ de la matriz $\boldsymbol{B}$ y así sucesivamente hasta sumar el elemento $(\boldsymbol{n},\boldsymbol{m})$ de $\boldsymbol{A}$ con el elemento $(\boldsymbol{n},\boldsymbol{m})$ de $\boldsymbol{B}$

NOTA: La suma-resta no está definida para matrices de diferentes tamaños.

Ejemplo 1. Sumar las matrices $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{3} & -\mathbf{1} & \mathbf{4}\\ \mathbf{2} & \mathbf{5} & -\mathbf{3}\\ \mathbf{6} & \mathbf{4} & \mathbf{5}\end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-\mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{5}\\ -\mathbf{3} & \mathbf{4} & -\mathbf{2}\\ \mathbf{1} & -\mathbf{4} & \mathbf{3}\end{pmatrix}$

Primero se tiene que verificar que se pueda realizar la operación, la matriz A es de 3 filas y 3 columnas y la matriz B también, entonces se puede realizar la operación.

$$A+B=\begin{pmatrix}3 & -1 & 4\\ 2 & 5 & -3\\ 6 & 4 & 5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & 1 & 5\\ -3 & 4 & -2\\ 1 & -4 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 9\\ -1 & 9 & -5\\ 7 & 0 & 8\end{pmatrix}$$

2.2 Multiplicación de un escalar por una matriz

Si $A=(a_{ij})$ es una matriz de $m\ x\ n$ y si k es un escalar, entonces la matriz $m\ x\ n$, KA, está dada por:

$$\boldsymbol{KA=(Ka_{ij})=k\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm}\end{pmatrix}}$$

$$KA=\begin{pmatrix}ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1m}\\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2m}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ ka_{n1} & ka_{n2} & \cdots & ka_{nm}\end{pmatrix}$$

Ejemplo. Sea $k=3$ y $A=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 3 & 5\\ -1 & -7\end{pmatrix}$, realizar la multiplicación KA.

$$\boldsymbol{kA=3\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 3 & 5\\ -1 & -7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & 12\\ 9 & 15\\ -3 & -21\end{pmatrix}}$$

Ejemplo. Sean $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{5} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{-6} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$, realizar la operación $2A + 4B$

$$\mathbf{2}\boldsymbol{A} + \mathbf{4}\boldsymbol{B} = \mathbf{2}\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{5} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} + \mathbf{4}\begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{-6} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{10} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{16} & \mathbf{-24} \\ \mathbf{-12} & \mathbf{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{20} & \mathbf{-14} \\ \mathbf{-24} & \mathbf{8} \end{pmatrix}$$

2.3 Producto de dos matrices:

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de $m\ x\ n$ y sea $B = \left(b_{ij}\right)$ una matriz de $n\ x\ q$. Entonces el producto de A y B es una matriz de m x q, $R = \left(r_{ij}\right)$, , en donde:

$$R_{ij} = (Renglon\ i\ de\ A) * (Columna\ j\ de\ B)$$

Es decir, el elemento $ij\ de\ AB$ es el producto escalar del renglón i de A y la columna j de B.

No todas las matrices pueden multiplicarse. Dos matrices se pueden multiplicar cuando cumplen…"

Para que dos matrices $A\ y\ B$, en este orden, $A * B$, se puedan multiplicar es condición indispensable que el número de columnas de A sea igual al número de filas de B, si no se cumple esta condición se dice que el producto $A * B$ no está definido, de modo que esta es una condición que debemos comprobar previamente.

La multiplicación matricial NO ES CONMUTATIVA, es decir: $\boldsymbol{A} * \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B} * \boldsymbol{A}$

Ejemplo: Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; realizar el producto $A * B$

Primero se verifica que la operación este definida, la matriz $\boldsymbol{A}$ **es de** $\mathbf{2} * \mathbf{2}$ y la matriz $\boldsymbol{B}$ es de $\mathbf{2} * \mathbf{3}$, por lo tanto, si está definida la operación.

$$\boldsymbol{A} \textbf{ es de } \mathbf{2} * \underbrace{\mathbf{2} \qquad \boldsymbol{B} \text{ es de } \mathbf{2}} * \mathbf{3},$$

Debe ser el mismo número para que se pueda realizar la multiplicación de matrices

Ejemplos:

1) Sean las matrices A y B, obtener el producto de A*B

$$A * B = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -4 & 2 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$A * B = \begin{pmatrix} (2 \cdot 1) + (-5 * -4) & (2 * -3) + (-5 * 2) & (2 * 5) + (-5 * -1) \\ (-3 * 1) + (4 * -4) & (-3 * -3) + (4 * 2) & (-3 * 5) + (4 * -1) \end{pmatrix}$$

$$A * B = \begin{pmatrix} 2 + 20 & -6 - 10 & 10 + 5 \\ -3 - 16 & 3 + 8 & -15 - 4 \end{pmatrix}$$

$$A * B = \begin{pmatrix} 22 & -16 & 15 \\ -19 & 11 & -19 \end{pmatrix}$$

2) Sean las matrices E y F, obtener el producto de E *F

$$E = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 & 4 \\ -1 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -2 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ -5 & 3 & 5 & 7 \\ 4 & 1 & -6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$E * F = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 & 4 \\ -1 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -2 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ -5 & 3 & 5 & 7 \\ 4 & 1 & -6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 10 - 2 + 15 + 16 & -5 + 6 - 9 + 4 & 20 + 0 - 15 - 24 & -10 + 4 - 21 - 12 \\ -2 - 3 - 30 + 28 & 1 + 9 + 18 + 7 & -4 + 0 + 30 - 42 & 2 + 6 + 42 - 21 \end{pmatrix}$$

$$E * F = \begin{pmatrix} 39 & -4 & -19 & -39 \\ -7 & 35 & -16 & 29 \end{pmatrix}$$

2.4 Propiedades de las operaciones con matrices.

Sean A, B y C matrices de mxn y sean k y l dos escalares. Entonces:

Elemento neutro de la suma	1. $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$
Matriz opuesta	2. $A + (-A) = (-A) + A = 0$
Propiedad conmutativa de la suma	3. $A + B = B + A$
Propiedad asociativa de la suma	4. $(A + B) + C = A + (B + C)$
Propiedad distributiva multiplicación por un escalar	5. $K(A + B) = KA + kB$
Elemento neutro del producto	$1 * A = A * 1 = A$

2.5 Potencia de una matriz cuadrada.

Se define la potencia de una matriz cuadrada (si no es cuadrada no es posible calcular la potencia), al producto matricial de n matrices iguales, esto es: $A^n = A * A * A * A * A \ldots\ldots\ldots A$

Ejemplo: sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcular A^3

$A^3 = A*A*A$, entonces primero calculamos A^2:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Después multiplicamos $A^2 * A$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

b) Calcular A^{20}

Cuando nos piden calcular potencias de una matriz de exponente muy elevado. En estos casos, es conveniente encontrar la fórmula general por inducción, como se muestra a continuación:

Lo primero es encontrar las matrices $A^2, A^3\ y\ A^4$ y a partir de los resultados poder generalizar por inducción y encontrar la potencia n-esima de la matriz A.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, podemos deducir que:

$$A^n = \begin{pmatrix} n+1 & n \\ -n & -n+1 \end{pmatrix}$$

Como el problema pide encontrar A^{20}usaremos la generalización anterior y tendremos que:

$$A^{20} = \begin{pmatrix} 21 & 20 \\ -20 & -19 \end{pmatrix}$$

2.6 Inversa de una matriz por el método de Gauss Jordan

Se dice que una matriz A de nxn es *invertible* si existe otra matriz C de nxn tal que

$$CA = I \text{ y } AC = I$$

donde $I = I_n$, la matriz identidad $nxn.$ En este caso, C es un *inverso* de A. De hecho, C está determinado únicamente por A. Este inverso único se denota mediante A^{-1}, de tal manera que:

$$A^{-1} * A = I \qquad y \qquad A * A^{-1} = I$$

Para saber si una matriz tiene inversa lo primero que tenemos que hacer es calcular su determinante.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$Det\ A = (6 * -1) - (2 * 3)$$

$$Det\ A = -12$$

Si la determinante nos hubiera dado 0 quiere decir que la matriz A no tiene inversa.

Para calcular la inversa de la matriz A tenemos que seguir los siguientes pasos

1. Agregar a la matriz A la matriz identidad (I_2) de tamaño 2x2.

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 6 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

2. Realizamos los pasos necesarios para que la matriz A cambie a una matriz Identidad (I)

   NOTA: Podemos intercambiar fila y realizar operaciones como sumas, retas, multiplicaciones y divisiones (las operaciones realizadas se aplicarán a todos los elementos de la fila).

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 6 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) f_1 \leftrightarrow f_2 \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 6 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \frac{1}{2} f_1 \rightarrow f_1 \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 6 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) f_2 - 6f_1 \rightarrow f_2$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 6 & 1 & -3 \end{array}\right) \frac{1}{6} f_2 \rightarrow f_2 \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) f_1 + \frac{1}{2} f_2 \rightarrow f_1 \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\text{Por lo tanto } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Actividades

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -4 & -7 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\ y\ C = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 9 & -2 \end{pmatrix},$

   calcula:

   a) $A + B$
   b) $2A + B$
   c) $C - A$
   d) $2A + 3C$
   e) $A + B + C$

2. En los siguientes ejercicios realiza las operaciones indicadas

   a) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\ \ B = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

   b) $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -4 & -7 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

   a) A*B
   b) C*D

3. Calcular A^{100} siendo A= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. En los siguientes ejercicios encuentra la matriz inversa.

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -7 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 7 & -8 \end{pmatrix}$$

2.7 Transformaciones elementales por filas

Dada una matriz A cualquiera, las *transformaciones elementales* por filas de A son tres:

1. Intercambiar la posición de dos filas.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & -3 \\ 6 & 4 & 5 \end{pmatrix} f_1 \leftrightarrow f_2 \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 3 & -1 & 4 \\ 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

2. Multiplicar una fila por un número real distinto de cero.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & -3 \\ 6 & 4 & 5 \end{pmatrix} (-3) f_1 \leftrightarrow f_1 \begin{pmatrix} -9 & 3 & -12 \\ 2 & 5 & -3 \\ 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

3. Sustituir una fila por el resultado de sumarle a dicha fila otra fila que ha sido previamente multiplicada por un número cualquiera.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & -3 \\ 6 & 4 & 5 \end{pmatrix} f_3 + 2f_1 \leftrightarrow f_3 \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & -3 \\ 12 & 2 & 13 \end{pmatrix}$$

Definición. Se dice que la matriz A está en la forma escalonada reducida si en ella se cumplen las siguientes 4 condiciones:

1. Si la matriz posee alguna o algunas líneas que consten exclusivamente de ceros, éstas se encuentran concentradas en la parte inferior de la matriz.
2. Para cada línea de la matriz que no consta exclusivamente de ceros, el primer elemento distinto de cero (leyendo de izquierda a derecha) de tal línea es 1.
3. Para cada dos líneas consecutivas que no constan exclusivamente de ceros, el primer elemento distinto de cero de la línea superior se encuentra a la izquierda del primer elemento distinto de cero de la línea a la que precede.

4. Cada columna que contiene un primer elemento distinto de cero de alguna línea tiene en las posiciones restantes 0. Si la matriz A satisface las condiciones 1, 2 y 3 pero no la 4, se dice que ésta se encuentra en la forma escalonada.

Ejemplos de matrices en su forma escalonada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Ejemplos de matrices en su forma escalonada reducida:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo. Utilice las operaciones por renglones para transformar la matriz a su forma escalonada.

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 2 & 5 & -3 \\ 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Utilizando las operaciones elementales tenemos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 2 & 6 & -4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right) f_1 \to f_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & -4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} f_2 - 2f_1 \to f_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -8 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} f_3 - 3f_1 \to f_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -8 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right) f_2 \to f_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} f_3 + 2f_2 \to f_3 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{5}\right) f_3 \to f_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo. Utilice las operaciones por renglones para transformar la matriz a su forma escalonada reducida

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & -5 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Utilizando las operaciones elementales tenemos:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} & -5 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} f_1 \leftrightarrow f_3 \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & -5 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} f_2 - 4f_1 \rightarrow f_2 \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -9 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} f_3 - 3f_2 \rightarrow f_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 28 \end{pmatrix} \frac{1}{28} f_3 \rightarrow f_3 \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} f_1 - 4f_2 \rightarrow f_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} f_2 + 9f_3 \rightarrow f_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} f_1 - 20f_3 \rightarrow f_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.8 Aplicación de matrices

Las matrices son herramientas del álgebra que facilitan el ordenamiento de datos, así como su manejo.

Las matrices se utilizan para múltiples aplicaciones y sirven, en particular, para representar los coeficientes de los sistemas de ecuaciones lineales o para representar las aplicaciones lineales; en este último caso las matrices desempeñan el mismo papel que los datos de un vector para las aplicaciones lineales.

A continuación, se muestran algunos problemas, los cuales se resuelven por operaciones matriciales:

Problema 1

1. Una fábrica de electrodomésticos ha vendido en los últimos tres años lavadoras (L) y secadoras (S). La matriz A expresa las unidades vendidas; la matriz B representa el precio de venta, en dólares, de cada electrodoméstico.

$$A = \begin{array}{c} \\ L \\ S \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 2019 & 2020 & 2021 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 210 & 160 & 130 \\ 160 & 140 & 210 \end{pmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} L & S \end{array} \\ \begin{pmatrix} 325 & 540 \\ 430 & 680 \\ 605 & 710 \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \\ 2019 \\ 2020 \\ 2021 \end{array}$$

a) ¿Cuánto se ingresó cada año por la venta de esos electrodomésticos?

Para dar respuesta a esta pregunta tenemos que efectuar la multiplicación de matrices, tendremos que multiplicar B*A, quedando de la siguiente manera:

$$B * A = \begin{pmatrix} 325 & 540 \\ 430 & 680 \\ 605 & 710 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 210 & 160 & 130 \\ 160 & 140 & 210 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{154,650} & 127{,}600 & 155{,}650 \\ 199{,}100 & \mathbf{164,000} & 198{,}700 \\ 240{,}650 & 196{,}200 & \mathbf{227,750} \end{pmatrix} = C$$

El ingreso en el 2019 es $C_{11} = 154{,}650\ USD$.

El ingreso en el 2020 es $C_{22} = 164{,}000\ USD$.

El ingreso en el 2019 es $C_{33} = 227{,}750\ USD$.

Los demás elementos no tienen ningún significado en este problema.

b) ¿En qué orden hay que multiplicar las matrices para obtener los ingresos por venta de cada electrodoméstico durante esos tres años? ¿Qué elementos de esa matriz dan esa información?

Se multiplica A por B

$$A * B = \begin{pmatrix} 210 & 160 & 130 \\ 160 & 140 & 210 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 325 & 540 \\ 430 & 680 \\ 605 & 710 \end{pmatrix} = \boldsymbol{D} \begin{pmatrix} \mathbf{215,700} & 314{,}500 \\ 239{,}250 & \mathbf{330,700} \end{pmatrix}$$

El elemento $D_{11} = 215{,}700$ nos indica los ingresos obtenidos por la venta de las lavadoras en los 3 años.

El elemento $D_{22} = 330{,}700$ nos indica los ingresos obtenidos por la venta de las secadoras en los 3 años.

Los demás elementos no tienen ningún significado en este problema.

Problema 2

2. Una compañía vende dos tipos de juguetes: Científicos y didácticos. La matriz A representa las ventas (en miles de dólares) de la compañía en el 2018 en tres ciudades y la matriz B representa las ventas en las mismas ciudades en el 2019.

$$A = \begin{array}{c} C \\ D \end{array} \begin{pmatrix} 420 & 450 & 320 \\ 380 & 520 & 390 \end{pmatrix} \quad B = \begin{array}{c} C \\ D \end{array} \begin{pmatrix} 480 & 400 & 390 \\ 450 & 560 & 420 \end{pmatrix}$$

La compañía compra un competidor en el año 2020 dobla las ventas que tuvo en el 2019. ¿Cuál es el cambio en ventas entre el año 2018 y 2020?

$$2B = 2\begin{pmatrix} 480 & 400 & 390 \\ 450 & 560 & 420 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 960 & 800 & 780 \\ 900 & 1120 & 840 \end{pmatrix}$$

El cambio en ventas entre el año 2018 y 2020 será:

$$2B - A = \begin{pmatrix} 960 & 800 & 780 \\ 900 & 1120 & 840 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 420 & 450 & 320 \\ 380 & 520 & 390 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 540 & 350 & 460 \\ 520 & 600 & 450 \end{pmatrix}$$

Problema 3

3. Una firma de automóviles dispone de dos plantas de fabricación una en Japón y otra en Alemania, en los que fabrica dos modelos de coches M1 y M2, de tres colores x, y, z. Su capacidad de producción diaria en cada planta está dada por las siguientes matrices (A para Japón y B para Alemania).

$$A = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 120 & 90 \\ 160 & 75 \\ 140 & 110 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \end{array} \quad B = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 95 & 85 \\ 120 & 110 \\ 85 & 90 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \end{array}$$

a) Determinar la representación matricial de la producción total por día.

$$A + B = \begin{pmatrix} 120 & 90 \\ 160 & 75 \\ 140 & 110 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 95 & 85 \\ 120 & 110 \\ 85 & 90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 215 & 175 \\ 280 & 185 \\ 225 & 200 \end{pmatrix}$$

b) Si se eleva la producción en Japón un 30% y se disminuye en Alemania un 20% ¿qué matriz representa la nueva producción total?

$$1.25A + 0.95B = (1.3)\begin{pmatrix} 120 & 90 \\ 160 & 75 \\ 140 & 110 \end{pmatrix} + 0.80B\begin{pmatrix} 95 & 85 \\ 120 & 110 \\ 85 & 90 \end{pmatrix}$$

$$1.25A + 0.95B = \begin{pmatrix} 156 & 117 \\ 208 & 98 \\ 182 & 143 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 76 & 68 \\ 96 & 88 \\ 68 & 72 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 232 & 185 \\ 304 & 186 \\ 250 & 150 \end{pmatrix}$$

Problema 4

4. En una academia de idiomas se imparte inglés y francés en cuatro niveles y dos modalidades: grupos normales y grupos reducidos. La matriz A expresa el número de personas de cada grupo, donde la primera columna corresponde a los cursos de inglés, la segunda a los de francés y las filas, a los niveles primero, segundo, tercero y cuarto, respectivamente. Las columnas de la matriz B reflejan el porcentaje de estudiantes (común para ambos idiomas) que siguen curso reducido (primera fila) y curso normal (segunda fila) para cada uno de los niveles.

$$A = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{pmatrix} 150 & 140 \\ 210 & 120 \\ 180 & 150 \\ 120 & 80 \end{pmatrix} \quad B = \begin{array}{c} Reducido \\ Normal \end{array} \begin{pmatrix} 0.20 & 0.10 & 0.15 & 0.60 \\ 0.80 & 0.90 & 0.85 & 0.40 \end{pmatrix}$$

a) Obtener la matriz que proporciona el número de estudiantes por modalidad e idioma.

Para dar respuesta tenemos que multiplicar B*A dándonos como resultado la matriz C en donde la primera columna son el total de alumnos que cursan inglés y la segunda los que cursan francés.

$$B * A = \begin{pmatrix} 0.20 & 0.10 & 0.15 & 0.60 \\ 0.80 & 0.90 & 0.85 & 0.40 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 150 & 140 \\ 210 & 120 \\ 180 & 150 \\ 120 & 80 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{array}{c} Reducido \\ Normal \end{array} \begin{pmatrix} 132 & 204 \\ 393 & 546 \end{pmatrix} = C$$

b) Sabiendo que la academia cobra $1500 por persona en grupos reducidos y $2300 por persona en grupo normal, hallar la cantidad ingresada en cada uno de los idiomas.

Primero tendremos la matriz $D = (1500 \quad 2300)$

Después tendremos que multiplicar la matriz $D * C$

$$D * C = (1500 \quad 2300) * \begin{pmatrix} 132 & 204 \\ 393 & 546 \end{pmatrix} = (1´101{,}900 \quad 1´561{,}800)$$

Por lo tanto, tenemos que se obtienen $1´101,900 de las clases de inglés y 1´561,800 de francés.

UNIDAD 3. SOFTWARE “R”

R es una herramienta informática (específicamente, un lenguaje computacional) sumamente potente para realizar distintos cálculos científicos, numéricos y estadísticos, así como para crear gráficas y figuras de gran calidad. R, de hecho, tiene hoy en día gran popularidad entre la comunidad académica y entre distintos profesionales. Esto no es casual puesto que R es un excelente producto que, entre una gama de virtudes, es gratuito, relativamente fácil de operar y cuenta con una gran comunidad de internet que contribuye a resolver dudas y problemas, sin costo alguno, Rodríguez (2019).

R fue creado hace relativamente poco, en 1993, por Robert Gentleman (doctor en estadística por parte de la Universidad de Washington y quien actualmente trabaja en Genentech, Estados Unidos) y por Ross Ihaka (doctor por la Universidad de Berkeley y quien trabaja hoy en día como profesor asociado de la Universidad de Auckland, Nueva Zelanda.

Asimismo, el objetivo de desarrollar R fue contar con una plataforma libre y gratuita para el uso y desarrollo de diversos algoritmos numéricos y estadísticos. R tiene un amplio margen de utilización que va desde la ciencia a la economía y de la medicina a la ingeniería, e incluso en estudios históricos, legales y sociológicos.

Además de sus robustas características de cálculo numérico, R permite la creación de figuras y gráficos de muy alta calidad y con efectos dinámicos, mismo que lo hace sumamente atractivo y, por lo tanto, logra que la labor de modelación, tan importante en muchas ramas de la ciencia.

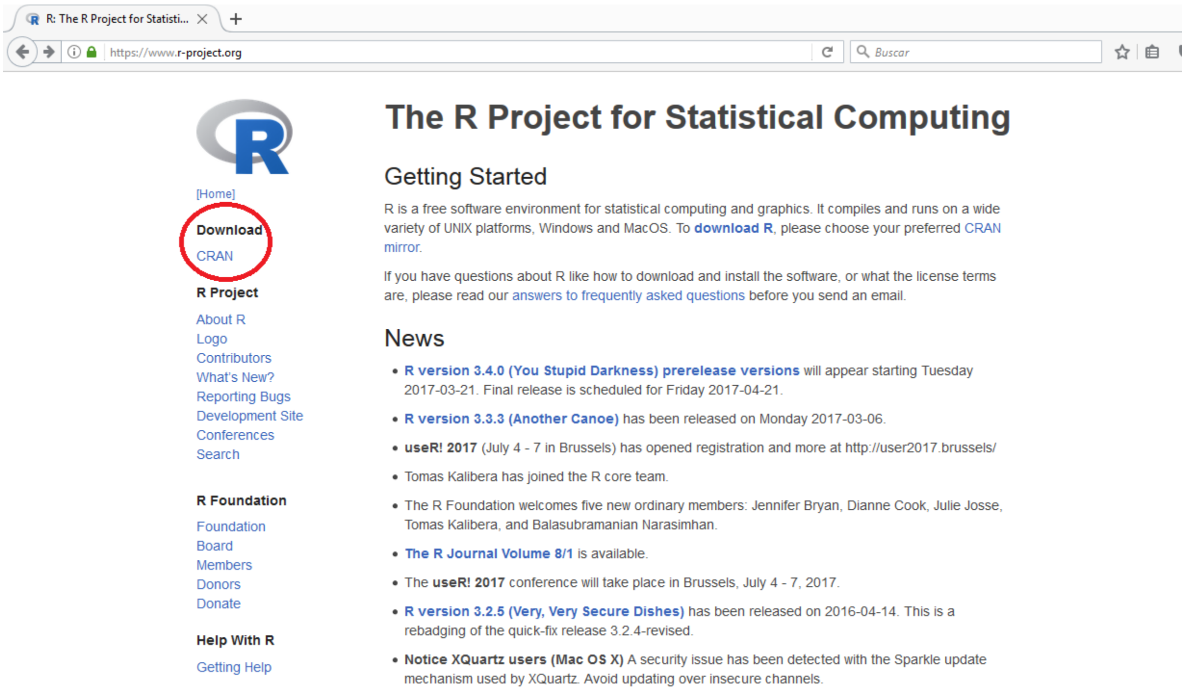
3.1 Instalación de R y RStudio

R puede ser descargado de manera gratuita en la siguiente dirección: https://www.r-project.org/.

Al ingresar a esta página, se selecciona la opción CRAN, que es el acrónimo de *Comprehensive R Archive Network*. En la nueva página se ingresa al servidor que sea de nuestra preferencia, y de ahí, dependiendo del sistema operativo con el cual se esté trabajando (Linux, MacOS o Windows), se toma el programa “base” el cual descarga e instala R, se recomienda aceptar los *defaults* al instalar el programa.

Figura 4.

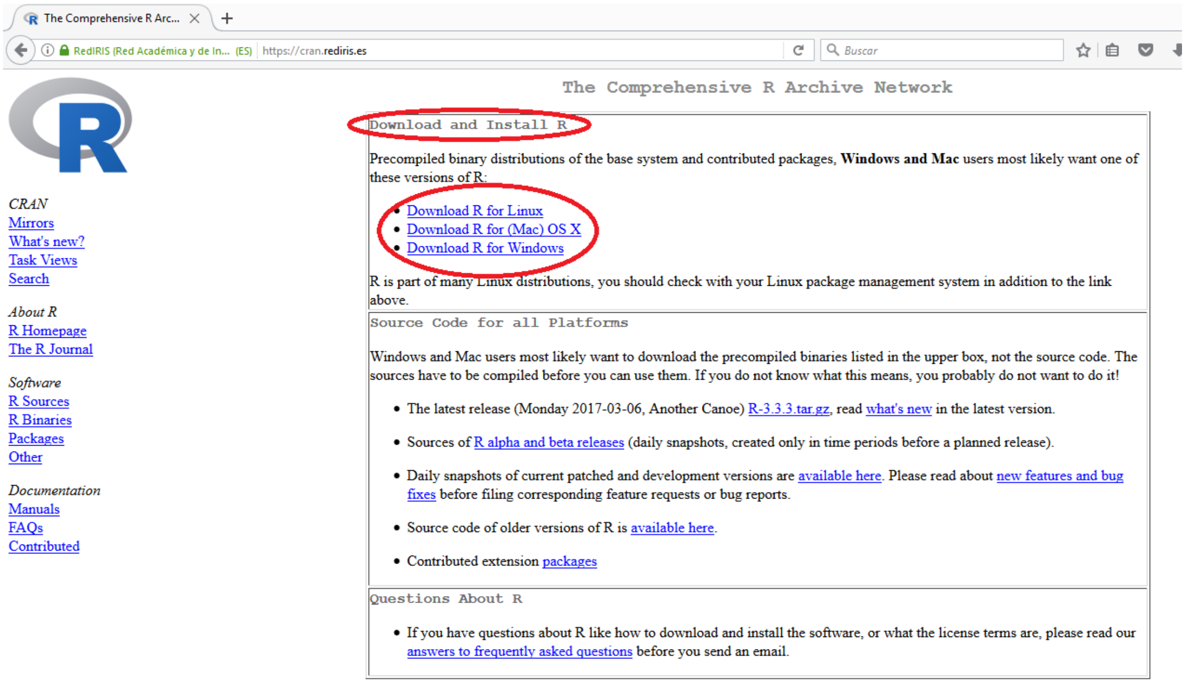
Descargar CRAN



Fuente: elaboración propia

Figura 5.

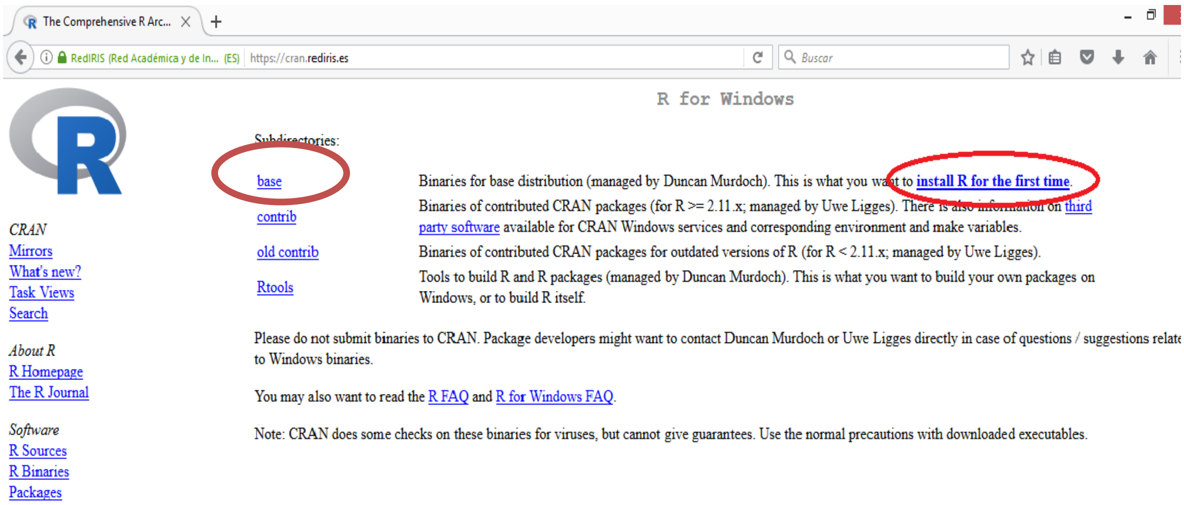
Pantalla descargar R



Fuente: elaboración propia

Figura 6.

Descargar programa "base"



Fuente: elaboración propia

3.2 Instalar RStudio.

Aunque podemos usar *R* directamente, es recomendable instalar y usar un entorno integrado de desarrollo (*IDE*, por sus siglas en inglés).

Podemos utilizar R ejecutando nuestro código directamente desde documentos de texto plano, pero esta es una manera poco efectiva de trabajar, especialmente en proyectos complejos.

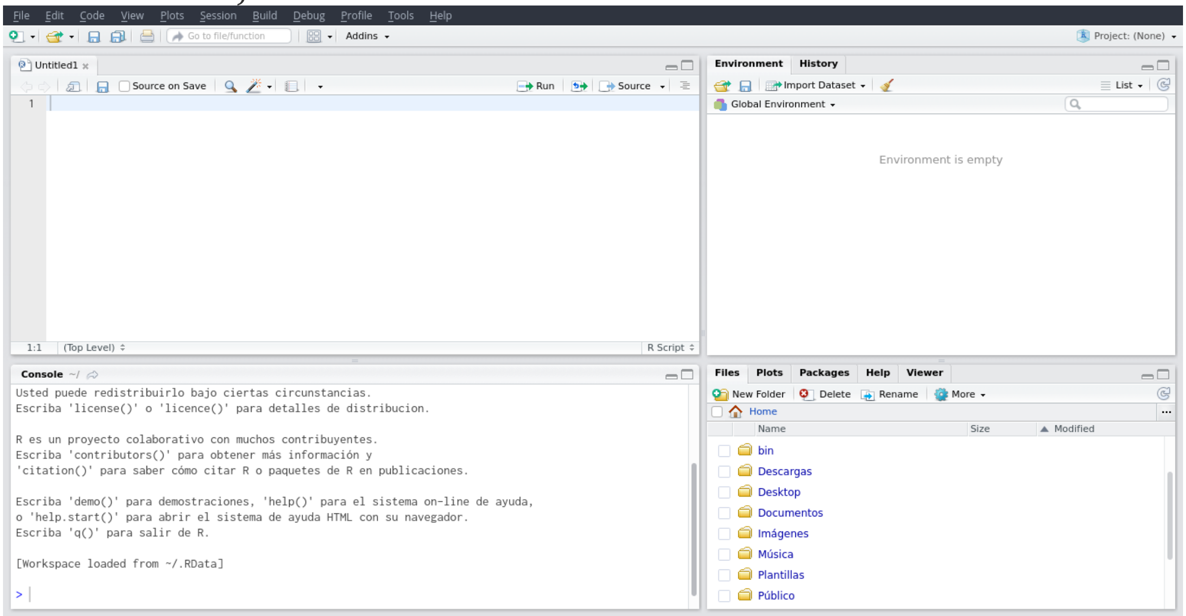
Un IDE nos proporciona herramientas para escribir y revisar nuestro código, administrar los archivos que estamos usando, gestionar nuestro entorno de trabajo y algunas otras herramientas de productividad. Tareas que serían difíciles o tediosas de realizar de otro modo, son fáciles a través de un IDE. Hay varias opciones de IDE para R, utilizaremos RStudio.

Para instalar RStudio, es necesario descargar y ejecutar alguno de los instaladores disponibles en su sitio oficial. Están disponibles versiones para Windows, OSX y Linux en la siguiente dirección web: https://www.rstudio.com/products/rstudio/download/

Si ya hemos instalado R en nuestro equipo, RStudio lo detectará automáticamente y podremos utilizarlo como se muestra en la siguiente figura 7.

Figura 7.

Interfaz de trabajo en R

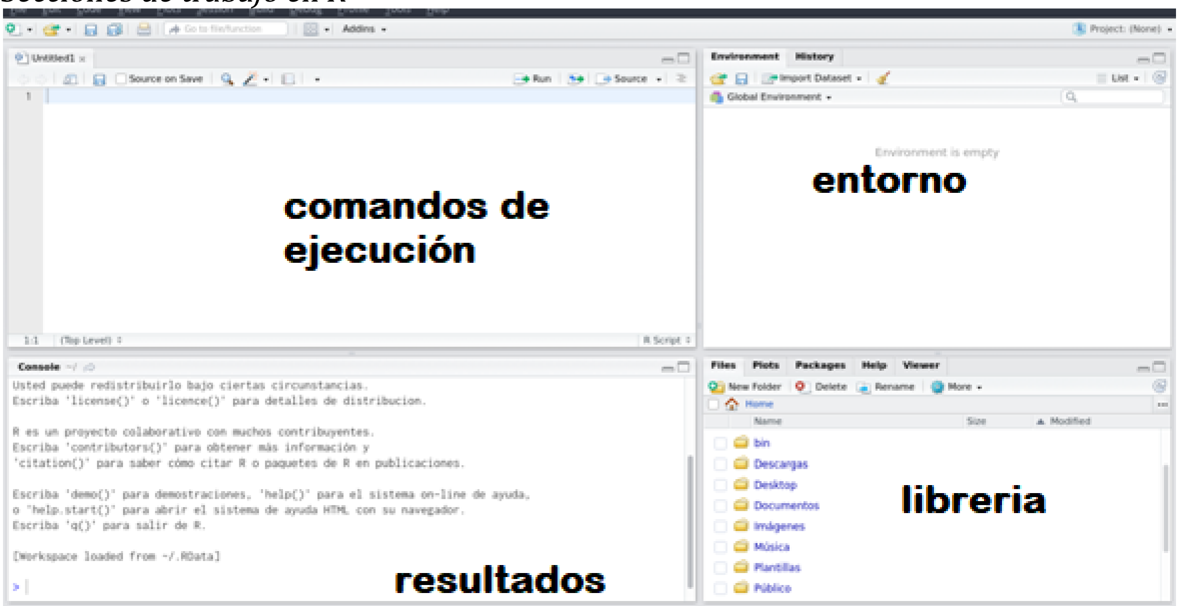


Fuente: elaboración propia

RStudio se compone de 4 secciones: Comandos de ejecución, entorno, resultados y librerías, ayuda y directorios.

Figura 8.

Secciones de trabajo en R



Fuente: elaboración propia

3.3 Operaciones matriciales con software R

En la siguiente tabla se muestra la sintaxis que se utiliza para realizar las operaciones básicas entre matrices.

Operación	Sintaxis
Adición	+
Sustracción	-
Multiplicación por un escalar	*
Producto de matrices	%*%
Potencia de matrices	mtx.exp()

Para dar inicio en R, primero definimos las matrices con las que trabajemos.

3.4 Suma de dos matrices en R.

Primeramente, es necesario definir las matrices a trabajar en R. En la pantalla de trabajo en R, sección de ejecutar comandos, escribimos lo siguiente:

```
# Crear la matriz A: de tamaño 3x3
A<-matrix(1:9, nrow = 3, byrow = TRUE)
A
```

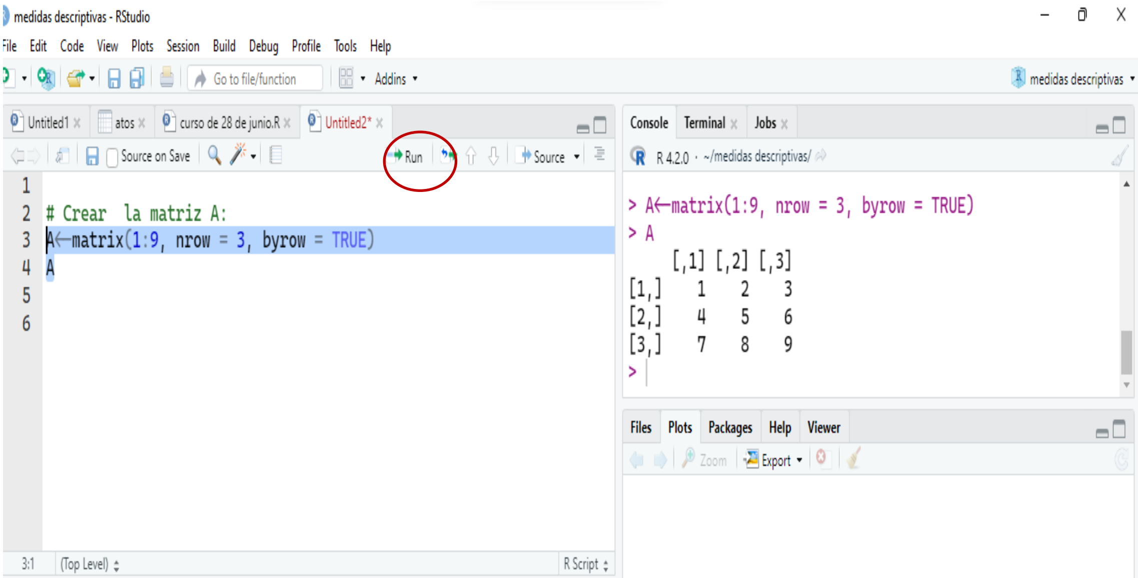
```
# Crear la matriz B: de tamaño 3x3, note que ahora se define la matriz como vector
es
B<-a<-c(4,5,4)   # primer vector.
b<-c(3,4,4)      # segundo vector.
d<-c(8,7,7)      # tercer vector.

B<-rbind(a,b,d)    # La matriz B.
B
```

Una vez escritos los comandos en la interfaz de ejecutar comandos de R, damos clic en el icono de Run para que se ejecuten las indicaciones, tal como se muestra a continuación en la figura 9. Asimismo, se puede observar que en la interfaz de la derecha aparece la matriz 3x3 llamada A. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{9} \end{pmatrix}$

Figura 9.

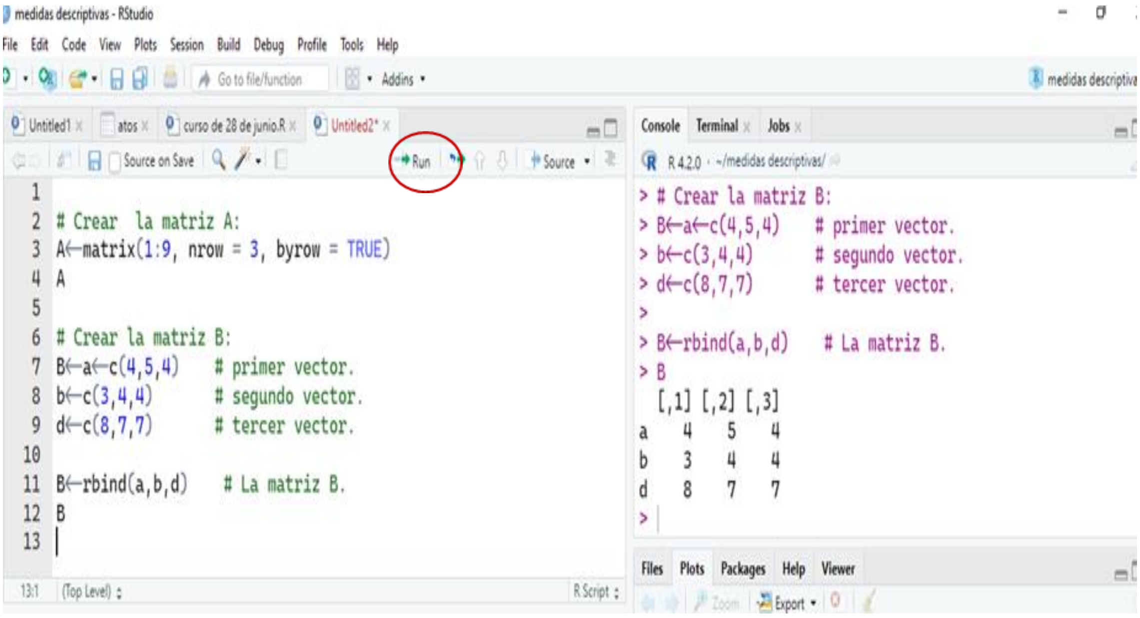
Definir matriz A.



Fuente: elaboración propia

Figura 10.

Definir la matriz B.



Fuente: elaboración propia

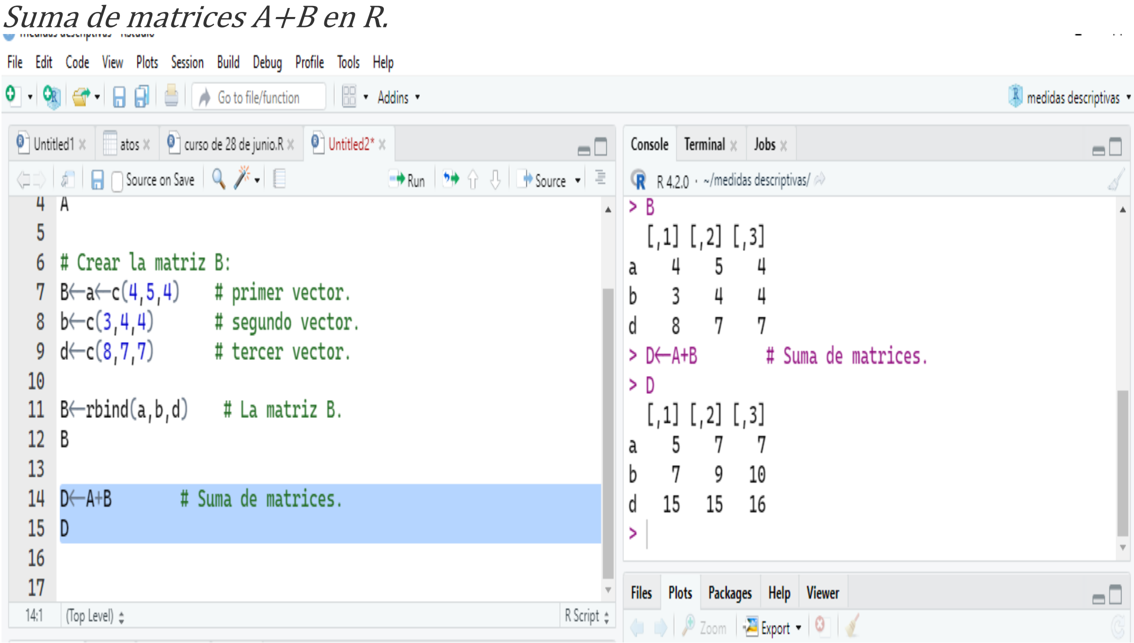
La figura 10, muestra cómo definir la matriz B en la interfaz de ejecutar comandos y posteriormente se da clic en Run, en la parte de la derecha aparece la matriz B, tamaño 3x3. $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \\ 8 & 7 & 7 \end{pmatrix}$

Una vez definidas las matrices A y B, creamos la matriz D como la adición de las matrices A+B

```
D<-A+B        # Suma de matrices.
D
```

Figura 11.

Suma de matrices A+B en R.



Fuente: elaboración propia

La figura 11, describe la matriz D, como resultado de la suma de A+B=D, tal como se puede observar en la interfaz de la derecha. D=A+B

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} + B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \\ 8 & 7 & 7 \end{pmatrix} = \quad D = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 7 \\ 7 & 9 & 10 \\ 15 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

3.5 Sustracción de dos matrices en R.

Utilizaremos las mismas matrices A y B, ya definidas con anterioridad.

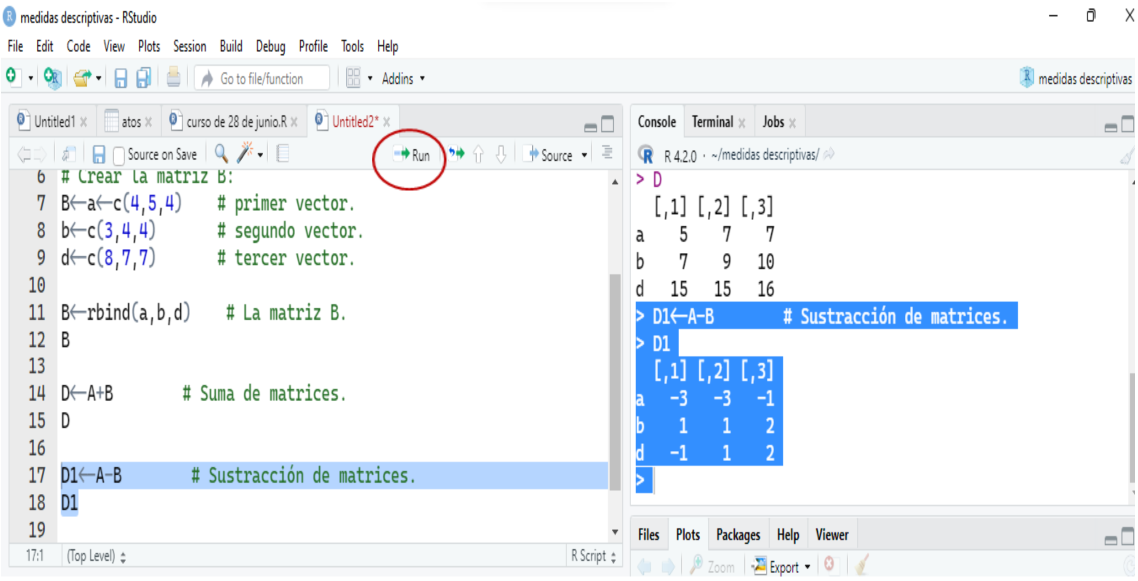
```
# Crear la matriz A: de tamaño 3x3
A<-matrix(1:9, nrow = 3, byrow = TRUE)
A
```

```
# Crear la matriz B: de tamaño 3x3, note que ahora se define la matriz como vector es
B<-a<-c(4,5,4)    # primer vector.
b<-c(3,4,4)       # segundo vector.
d<-c(8,7,7)       # tercer vector.

B<-rbind(a,b,d)   # La matriz B.
B
```

Figura 12.

Sustracción de dos matrices en R.



Fuente: elaboración propia

En la figura número 12, definimos las matrices A y B, posteriormente dar clic en icono Run, para que realice la operación D1=A-B.

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix} - B=\begin{pmatrix}4&5&4\\3&4&4\\8&7&7\end{pmatrix}= \quad D1=\begin{pmatrix}-3&-3&-1\\1&1&2\\-1&1&2\end{pmatrix}$$

3.6 Multiplicación de una matriz por un escalar.

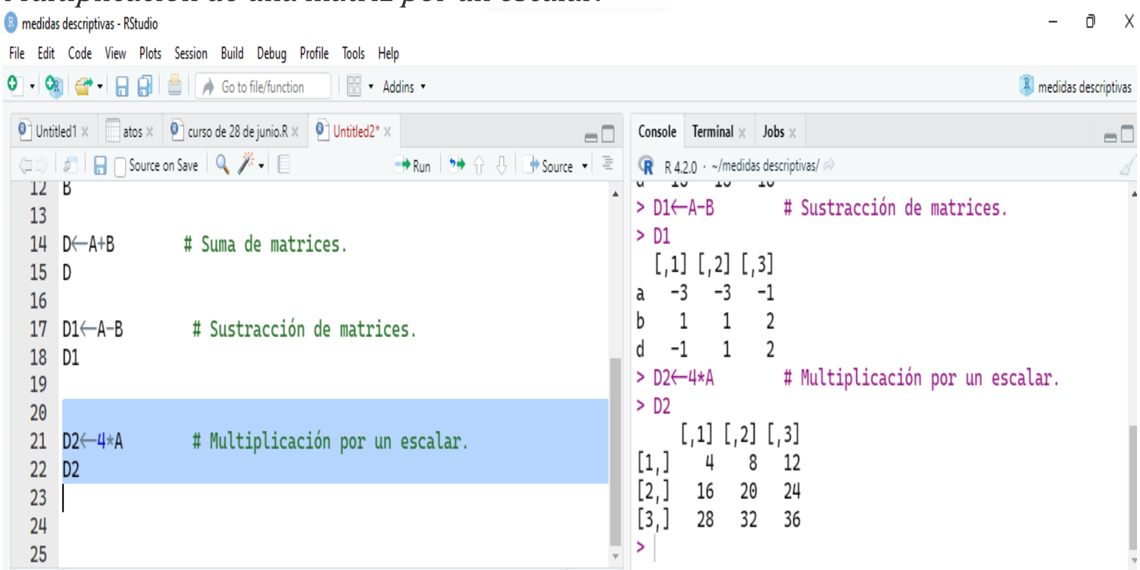
A continuación, definimos la matriz A:

```
# Crear la matriz A: de tamaño 3x3
A<-matrix(1:9, nrow = 3, byrow = TRUE)
A
```

Definimos en R, la indicación D2= 4A

```
D2<-4*A      # Multiplicación por un escalar.
D2
```

Figura 13.
Multiplicación de una matriz por un escalar.



Fuente: elaboración propia

La figura 13, muestra en la interfaz de la derecha la matriz D2, como resultado de multiplicar cada elemento de la matriz A por el escalar 4. D2= 4A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad 4\,A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 16 & 20 & 24 \\ 28 & 32 & 36 \end{pmatrix}$$

3.7 Multiplicación de dos Matrices.

Multiplicación de matrices: Para esto, es necesario usar el comando *%*%.*

Recordemos que usaremos las matrices A y B definidas con anterioridad.

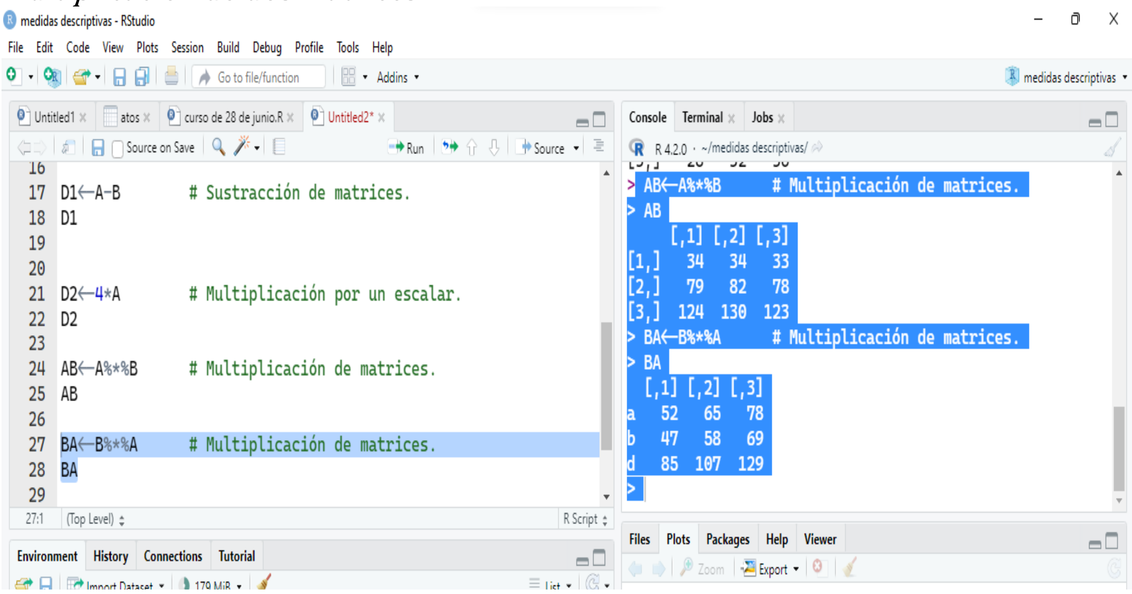
```
AB<-A%*%B     # Multiplicación de matrices.
AB

BA<-B%*%A     # Multiplicación de matrices.
BA
```

Es importante recordar que la multiplicación de matrices NO ES CONMUTATIVA AB≠BA, tal como se puede apreciar en la figura 14.

Figura 14.

Multiplicación de dos matrices



Fuente: elaboración propia

La figura 14, muestra el resultado de correr el producto de las matrices A*B y B*A, como se puede observar no se obtiene el mismo resultado, lo anterior obedece a que las matrices no cumplen la propiedad de Conmutatividad.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} * B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \\ 8 & 7 & 7 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A*B=} \begin{pmatrix} \mathbf{34} & \mathbf{34} & \mathbf{33} \\ \mathbf{79} & \mathbf{82} & \mathbf{78} \\ \mathbf{124} & \mathbf{130} & \mathbf{123} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \\ 8 & 7 & 7 \end{pmatrix} * A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B*A}=\begin{pmatrix} \mathbf{52} & \mathbf{65} & \mathbf{78} \\ \mathbf{47} & \mathbf{58} & \mathbf{69} \\ \mathbf{85} & \mathbf{107} & \mathbf{129} \end{pmatrix}$$

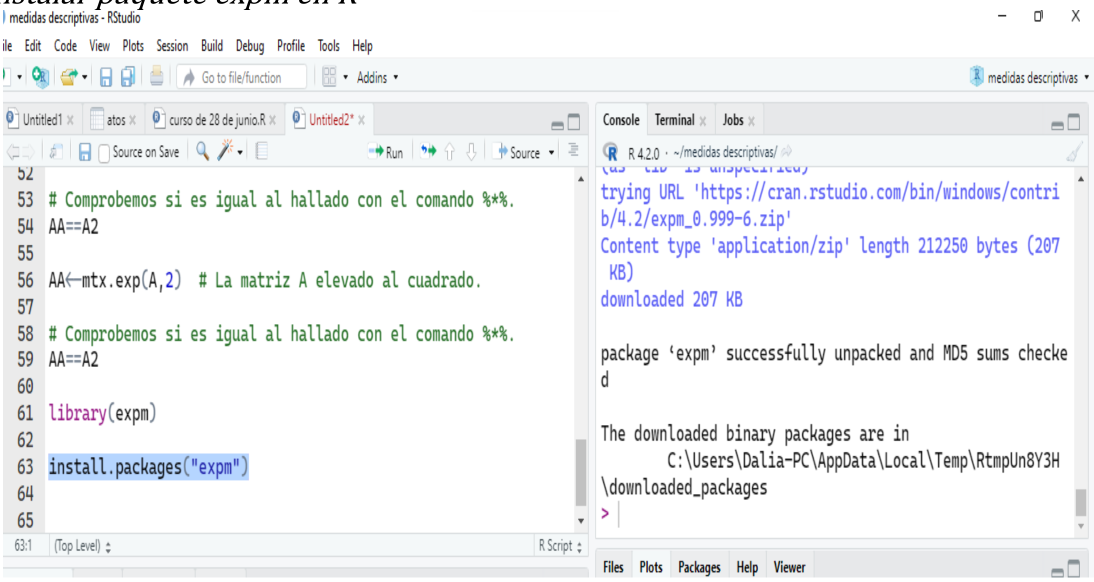
$$A*B \neq B*A$$

3.8 Potencia de una matriz cuadrada.

R no dispone en su paquete base de una función para calcular la potencia *n-ésima* de una matriz. No obstante, el paquete *expm* implementa el operador *%^%* construido con este objetivo. Su uso es muy simple: si queremos calcular la matriz A^n bastará con utilizar el comando *A %^% n.* Para que funcione esta instrucción debemos cargar previamente el paquete *expm.*

Figura 15.

Instalar paquete expm en R

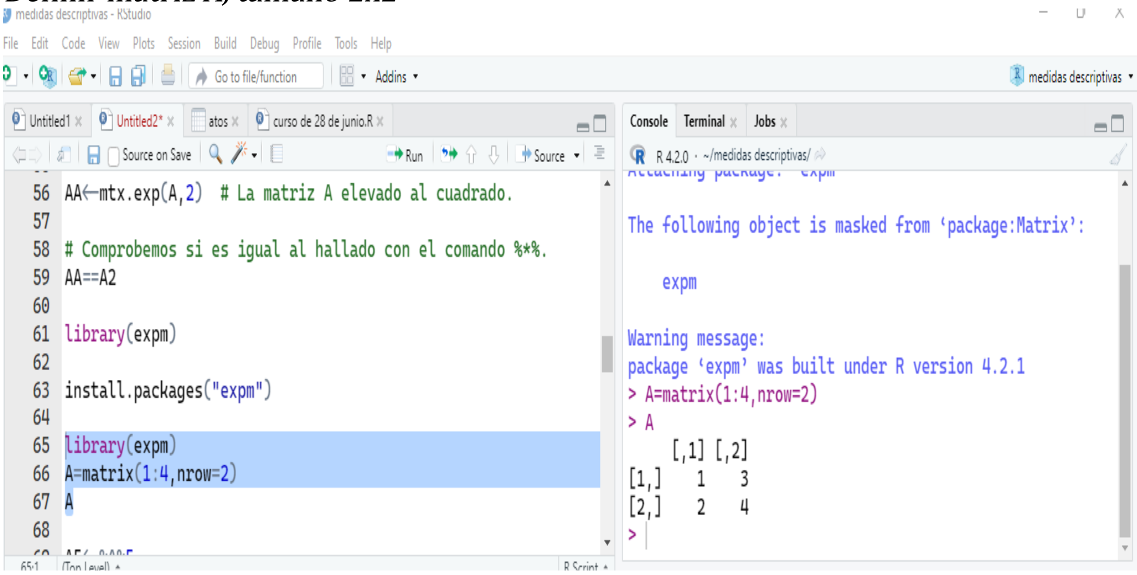


Fuente: elaboración propia

Una vez instalado el paquete *expm,* como lo muestra la figura 15, se procede a definir muestra nueva matriz A. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

```
library(expm)
A=matrix(1:4,nrow=2)    # Definimos la matriz A, tamaño 2x2
A
```

Figura 16.
Definir matriz A, tamaño 2x2

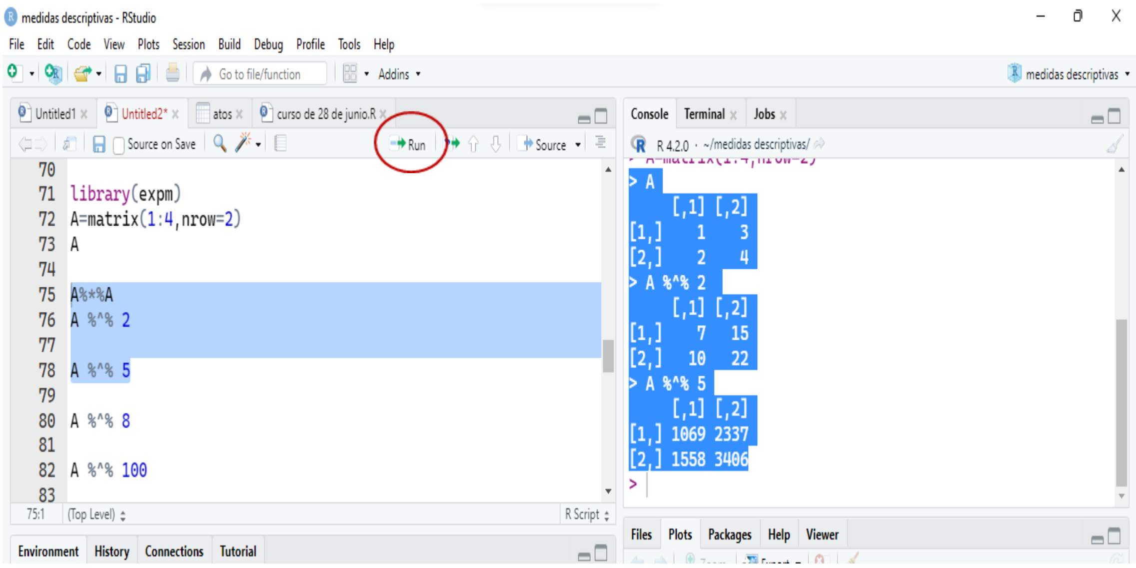


Fuente: elaboración propia

La figura 16, describe el código para definir la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, una vez definida la matriz A en el software R, escribir códigos para calcular las matrices a las siguientes potencias: A^2, A^5, A^8, A^{100}. Recordar el comando a usar A %^%.

```
A %^% 2      # matriz "A" a la 2 potencia
A %^% 5      # matriz "A" a la 5 potencia
A %^% 8      # matriz "A" a la potencia 8
A %^% 100    # Matriz "A" a la potencia 100
```

Figura 17.
Matriz A^2, A^5



Fuente: elaboración propia

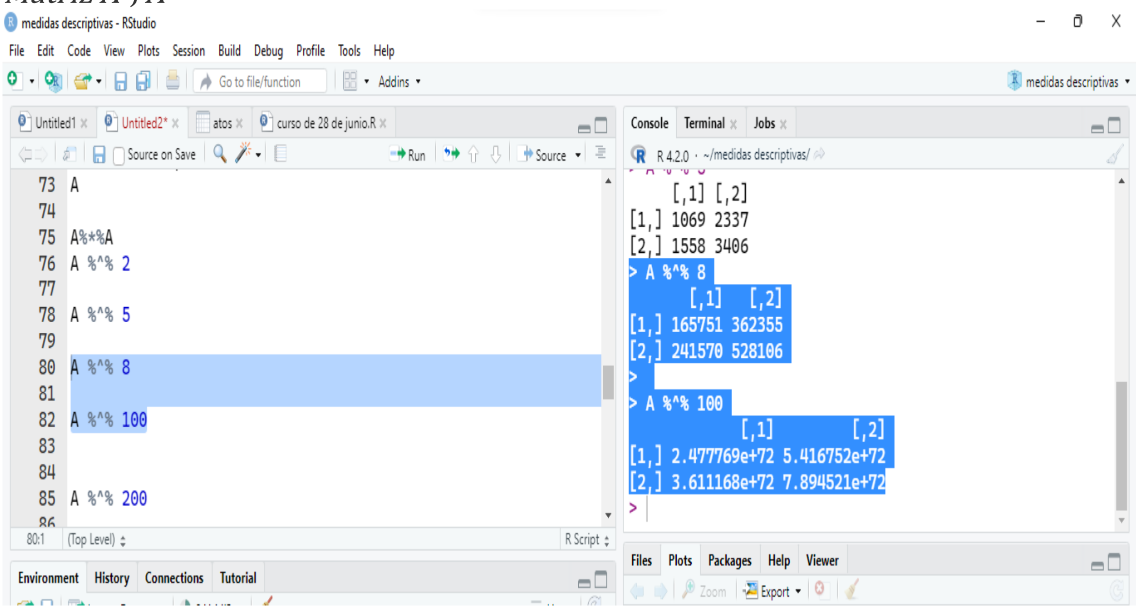
La figura 17, muestra el resultado en R, de elevar las matrices a las potencias: A^2, A^5.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 15 \\ 10 & 22 \end{pmatrix} \qquad\qquad A^5 = \begin{pmatrix} 1069 & 2337 \\ 1558 & 43406 \end{pmatrix}$$

Posteriormente se procede a calcular las potencias para A^8, A^{100} en el software R.

Figura 18.

Matriz A^8, A^{100}



Fuente: elaboración propia

La figura 18, describe el resultado de realizar los cálculos para las matrices: A^8 y A^{100}, como se puede observar el software R, nos ayuda a agilizar los procesos de cálculo, ¿imaginemos cuánto tiempo tardaríamos en calcular A^{100}?

$$A^8 = \begin{pmatrix} 165751 & 362355 \\ 241570 & 528106 \end{pmatrix} \qquad A^{100} = \begin{pmatrix} 2.477769e+72 & 5.416752e+72 \\ 3.6111683+72 & 7.894521e+72 \end{pmatrix}$$

3.9 Otras operaciones con matrices

Operación	Sintaxis
Transpuesta	t()
Diagonal	**diag()**
Determinante	**det()**
Inversa	**solve()**
Rango	**qr()$rank**

Nota: Seguiremos usando las matrices ya definidas anteriormente para A y B.

3.10 Matriz transpuesta

Una matriz transpuesta es el resultado de reordenar la matriz original mediante el cambio de filas por columnas y las columnas por filas en una nueva matriz. Para calcular la transpuesta usaremos el comando t(). $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

Primeramente, definimos la matriz A en software R, posteriormente definimos código para calcular la transpuesta de A.

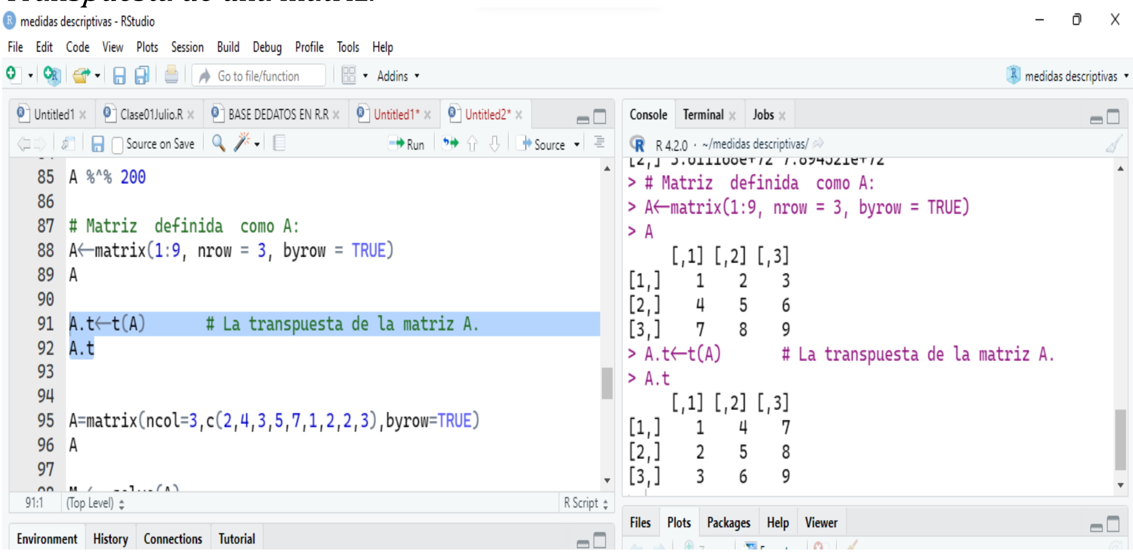
```
# Matriz definida como A:
A<-matrix(1:9, nrow = 3, byrow = TRUE)
A
A.t<-t(A)      # La transpuesta de la matriz A.
A.t            # Definimos al vector A.t como la transpuesta de la matriz A.
```

A continuación, en la figura 19, se muestra el cálculo para la matriz transpuesta que realiza el software R.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix} \qquad A.t=\begin{pmatrix}1 & 4 & 7\\ 2 & 5 & 8\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix}$$

Figura 19.

Transpuesta de una matriz.



Fuente: elaboración propia

3.11 Determinante de una matriz

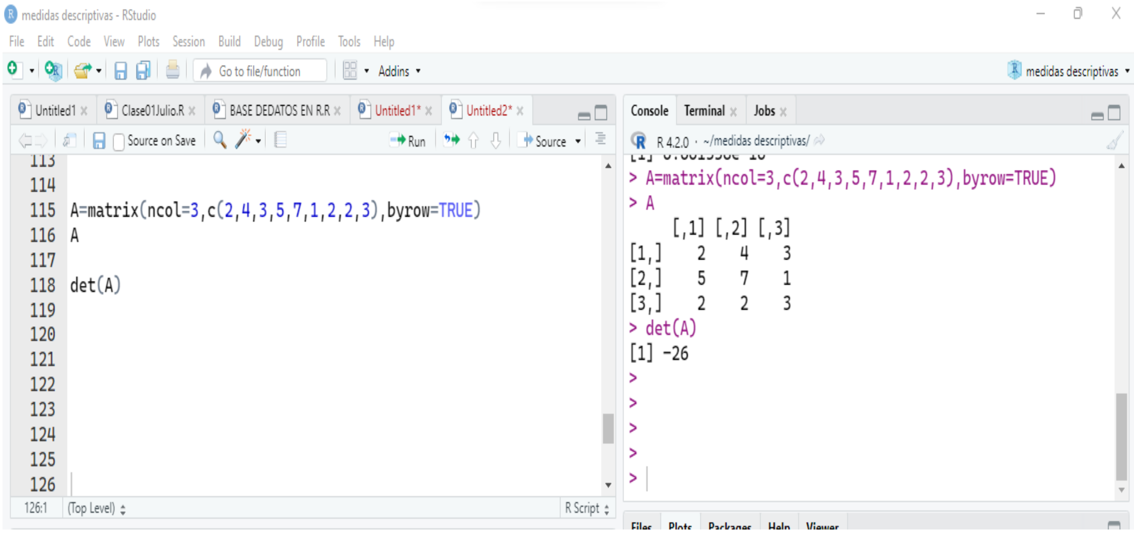
Para obtener el determinante de cualquier matriz, se usa la función det(), recuérdese que para poder calcular el determinante de cualquier matriz esta debe ser cuadrada. El determinante de nuestra matriz A, definir y calcular en R.

```
A=matrix(ncol=3,c(2,4,3,5,7,1,2,2,3),byrow=TRUE)      # definimos la matriz A
A
det(A)
```

$$A=\begin{pmatrix}2 & 4 & 3\\ 5 & 7 & 1\\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix} \qquad \det(A)= -26$$

Figura 20.

Determinante de una matriz



Fuente: elaboración propia

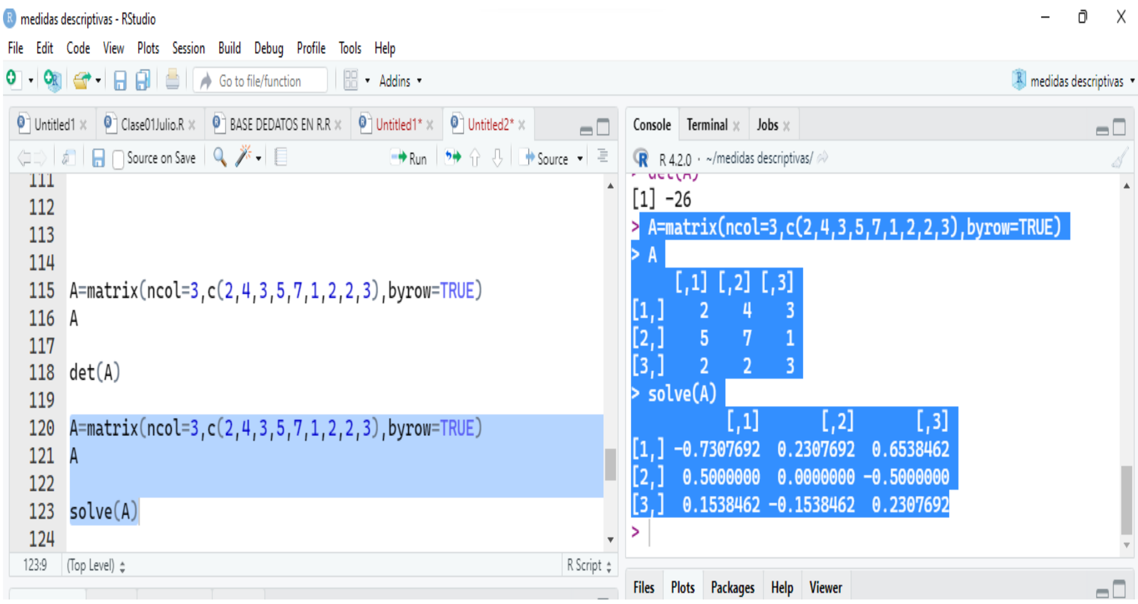
3.12. Matriz inversa

R dispone de la función *solve()* para resolver sistemas de ecuaciones lineales. En particular, si el sistema a resolver es de la forma *Ax=b* (donde b podría ser también una matriz), su solución es $x=A^{-1}\ b$, que en R se obtiene mediante *solve(A,b).*

```
A=matrix(ncol=3,c(2,4,3,5,7,1,2,2,3),byrow=TRUE)      # definimos la matriz A
A
solve(A)          # calcula la inversa de la matriz A
```

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 5 & 7 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad A^{-1}=\begin{pmatrix} -0.7307692 & 0.2307692 & 0.6538462 \\ 0.5000000 & 0 & -0.5000000 \\ 0.1538462 & -0.1538462 & 0.2307692 \end{pmatrix}$$

Figura 21.
Matriz inversa



Fuente: elaboración propia

Referencias

Fernández, T. & Tamaro, E. (2022). *Arthur Cayley*. Biografías y Vidas, la enciclopedia biográfica en línea. https://www.biografiasyvidas.com/biografia/c/cayley.htm

Fernández, T. & Tamaro, E. (2022). *James Joseph Sylvester*. Biografías y Vidas, la enciclopedia biográfica en línea. https://www.biografiasyvidas.com/biografia/s/sylvester.htm

Rodríguez S., J. L. Á. (2019). ¿Qué puede hacer el software R para resolver tus problemas? *Revista digital universitaria*, *20*, 1-10. https://doi.org/10.22201/codeic.16076079e.2019.v20n3.a5

Rosales, A. G. (2009). Evolución Histórica del Concepto de Matriz. *Revista Digital Matemática Educación e Internet*, *9,* 1-20. ttps://doi.org/10.18845/rdmei.v9i1.2038

Fernández, T. & Tamaro, E. (2022). *William Rowan Hamilton*. Biografías y Vidas, La enciclopedia biográfica en línea. https://www.biografiasyvidas.com/biografia/h/hamilton_william.htm

Matrices y software R

es un libro editado y publicado por la editorial UTP en presentación electrónica de descarga libre, publicado el 30 de diciembre del 2022.

Universidad Tecnocientífica del Pacífico S.C.

UTP

Transformando con Ciencias