Capítulo IX

Vectores en el plano y geometría dinámica con GeoGebra

DOI:https://doi.org/10.58299/utp.268.c935

Olivia Romero Tehuitzil
Facultad de Ciencias de la Computación
olivia.romero@correo.buap.mx
https://orcid.org/0000-0002-5207-7769

Armando Espíndola Pozos
Facultad de Ciencias de la Computación de la
armando.espindolap@correo.buap.mx
https://orcid.org/0000-0002-0375-1235

Yaneth Muñoz Herrera
Complejo Regional Norte Preparatoria
yaneth.munoz@correo.buap.mx
https://orcid.org/0000-0001-9202-4082

Patrocinio Nicolás Vicente Rojas
Complejo Regional Centro Preparatoria Ciudad Serdán
nicolas.rojas@correo.buap.mx
https://orcid.org/0009-0005-2966-3347

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Resumen

En este trabajo se describe con ejemplos una propuesta didáctica para que estudiantes de la Ingeniería en Ciencias de la Computación BUAP del curso de Álgebra Lineal con Elementos de Geometría An alítica mejoren su comprensión de algunos conceptos abstractos del álgebra lineal con la elaboración de dos tipos de representaciones geométricas una estática y otra dinámica usando los recursos del software libre GeoGebra. Se incluyen enlaces para la visualización de las animaciones realizadas.

Introducción

Regularmente se comienza estudiando los vectores por estar relacionados con algunos conceptos de la física como son los desplazamientos, la velocidad, la fuerza y la aceleración por mencionar algunos; en este caso los vectores, sus operaciones y propiedades a la par que sus representaciones geométricas permitirán hacer un estudio de las ecuaciones vectoriales de las rectas y planos en el espacio, así como para establecer algunas relaciones entre puntos, rectas y planos; dadas sus diversas aplicaciones, en particular en la graficación por computadora son de interés para un estudiante en ciencias de la computación.

La intención de la propuesta didáctica que se formula es sentar las bases para un estudio posterior de algunos conceptos abstractos del álgebra lineal como son: combinación lineal, espacio generado, dependencia e independencia lineal, bases y sistemas de coordenadas por mencionar algunos.

Objetivo

Elaborar representaciones geométricas de conceptos relacionados con los vectores en el plano utilizando el software libre GeoGebra para una mejor comprensión de sus operaciones, propiedades y posibles aplicaciones al álgebra lineal.

Marco teórico

Respecto al sistema de geometría dinámica Aytekin y Kiymaz (2019) comenta que la visualización que aporta el software matemático libre GeoGebra mejora la comprensión de conceptos matemáticos, se facilita la generalización y es posible hacer algunas inferencias de posibles resultados.

En el mismo orden de ideas, Barabash (2019) enuncia que los problemas de construcción en geometría son un recurso muy valioso que permite la exploración con diferentes niveles de dificultad y un alto desarrollo de la creatividad.

Así mismo en el trabajo de Londoño *et al.* (2017), mencionan que la visualización usada apropiadamente puede ser una gran herramienta en matemáticas para facilitar la compresión de conceptos matemáticos, apoyar en la demostración de resultados o bien para la construcción de argumentos.

Respecto al álgebra lineal Londoño *et a*l. (2017) consideran que, por su naturaleza abstracta, sin la visualización se tiende a memorizar las definiciones y la aplicación de los conceptos combinación lineal, espacio generado, dependencia lineal, e independencia lineal quedan a un nivel de cálculo cuando en realidad lo que requieren es un pensamiento dinámico lo cual aporta GeoGebra.

Propuesta didáctica

Es necesario disponer del software libre GeoGebra, disponible en el sitio www.geogebra.org para la realización de las actividades propuestas basadas en las temas propuestos por Larson (2017). Cada una será realizada paso a paso indicando las entradas a declarar en la barra de entrada de GeoGebra para resaltar algunos de los aspectos geométricos y algebraicos de los vectores en el plano, así como de sus operaciones y propiedades o bien se enunciarán los recursos a utilizarse.

En las actividades se expondrán dos formas de representación geométrica, la primera forma será estática del concepto en cuestión y la segunda forma será dinámica que incluirá el uso de deslizadores o animaciones, esto con la finalidad, por un lado: de fortalecer las habilidades de orientación espacial y por el otro contribuir a las generalizaciones vía el uso de parámetros.

Actividad 1

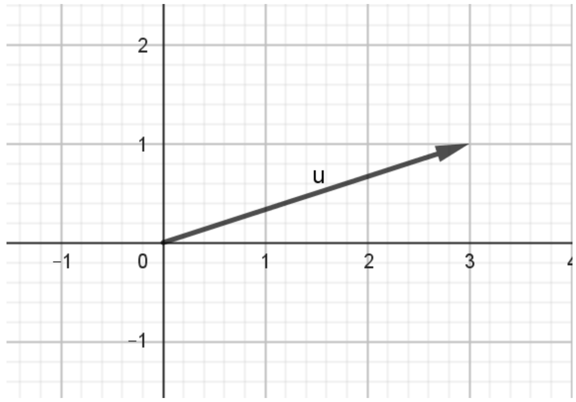
1.1 Representación geométrica estática, de un vector en el plano

Declarar en GeoGebra el vector ordinario

$$u = Vector\big((3,1)\big)$$

Figura 1

Gráfica de un vector ordinario en el plano



Fuente: Elaboración propia.

Vectores libres

¿Cómo se genera un vector libre $\boldsymbol{v}$ que parta de un punto **P**?

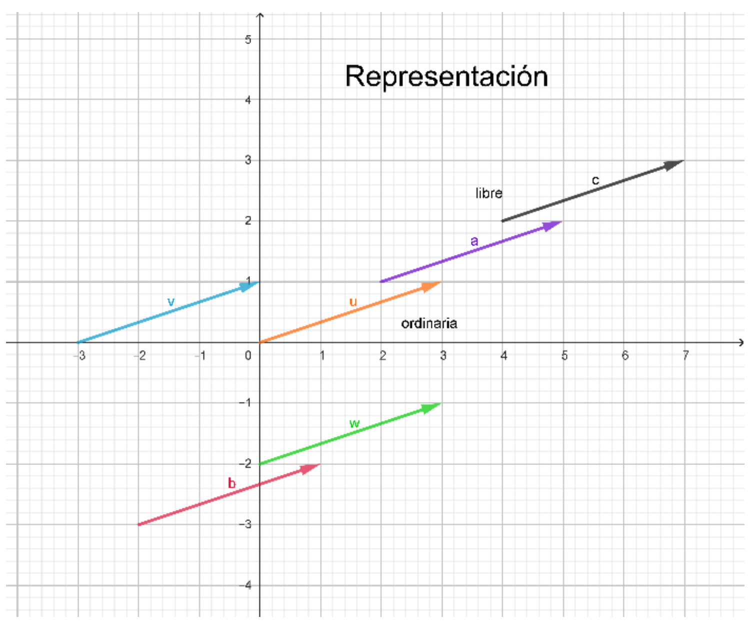
Dado un punto inicial arbitrario, por ejemplo, P(4,2) y el vector $v = (3,1)$, se le suman las coordenadas del vector (3,1) a las coordenadas del punto P(4,2), se obtiene el punto final (7,3), en GeoGebra se escribe $Vector\big((4,2),(7,3)\big)$.

Veamos al vector libre $v = (3,1)$ partiendo de diferentes puntos en el plano

Vector ((-3,0),(0,1)), $Vector\big((0,-2),(3,-1)\big)$, $Vector\big((2,1),(5,2)\big)$, $Vector\big((-2,-3),(1,-2)\big)$ y $Vector\big((4,2),(7,3)\big)$.

Figura 2

Gráfica de vectores libres



Fuente: Elaboración propia.

1.2 Representación geométrica dinámica de un vector en el plano

Declarar:

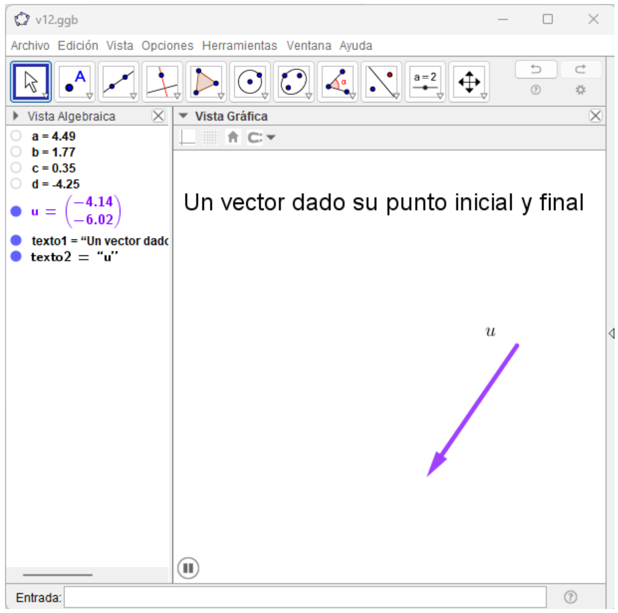
Cuatro deslizadores $a, b, c\ y\ d$

El vector $Vector\big((a,b),(c,d)\big)$

Dar animación a los deslizadores.

Figura 3

Gráfica de un vector libre con animación



Fuente: Elaboración propia. *Nota*: Activar la animación en https://www.geogebra.org/m/mzm23znf.

Actividad 2

2.1 Representación estática de la suma de vectores en el plano

Se declaran los vectores $u = (4,1)\ y\ v = (2,5)$, se ilustra la suma $u + v = (6,6)$.

Declarar en GeoGebra

Dos vectores $u = Vector((4,1))$ y $v = Vector(2,5)$

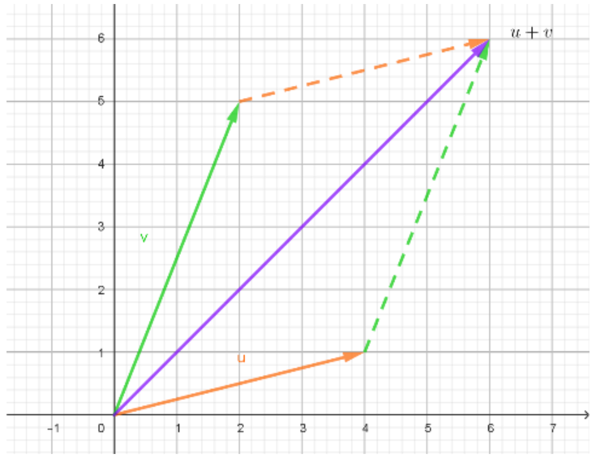
Los vectores paralelos a $u\ y\ v$ cuyos puntos iniciales sean $(4,1)\ y\ (2,5)$

$Vector\big((2,5),(6,6)\big)$ y $Vector\big((4,1),(6,6)\big)$

Se escribe el encabezado “Ley del Paralelogramo”

Figura 4

Gráfica de la suma de dos vectores



Fuente: Elaboración propia.

2.2 Representación geométrica dinámica de la suma de vectores

Declarar en GeoGebra

Cuatro deslizadores $a, b, c\ y\ d$

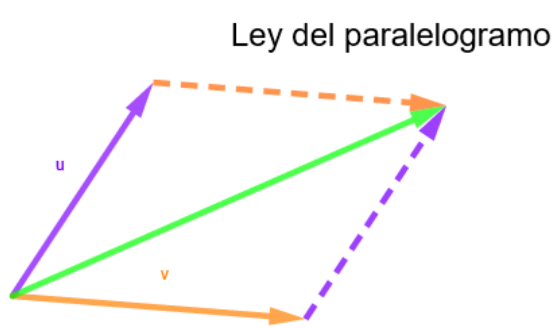
Declarar los vectores que formarán el paralelogramo

$Vector((a,b)),\quad Vector((c,d)),\quad Vector((a+c,b+d)),\quad Vector\big((a,b),(a+c,b+d)\big), Vector\big((c,d),(a+c,b+d)\big)$

Activar la animación a los parámetros $a, b, c\ y\ d$

Figura 5

Gráfica de la suma de dos vectores con animación



Fuente: Elaboración propia.

Actividad 3

3.1 Representación estática de la multiplicación por escalar

Se procederá a ilustrar el comportamiento del vector u = (2,3) cuando se multiplica por un escalar k

Por ejemplo:

cuando $k = 3$, se tiene $3(2,3) = (6,9)$ hay un alargamiento del vector

cuando $k = 0.5$ queda $(1,4.5)$ hay una contracción,

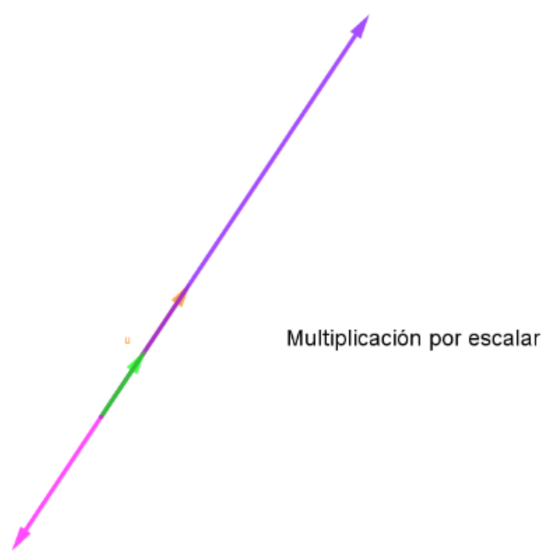
cuando $k = -1$, el vector invierte su dirección.

Declarar en la entrada de GeoGebra

$Vector\big((2,3)\big), 3 * u, 0.5 * u, -u$

Figura 6

Gráfica del alargamiento, contracción y cambio de dirección



Fuente: Elaboración propia.

3.2 Representación geométrica dinámica de la multiplicación por escalar

Declarar en GeoGebra

El deslizador k

El vector $v = Vector((1,3))$

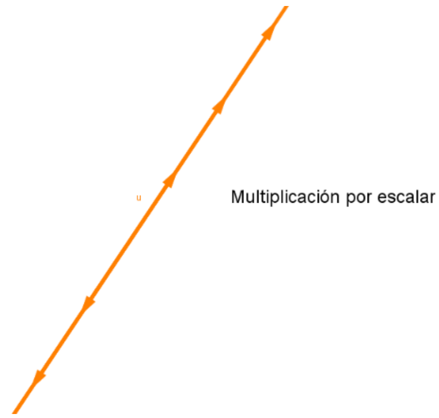
$k * v$

Manipular el deslizador

Activar la animación al parámetro k

Figura 7

Gráfica del alargamiento, contracción y cambio de dirección con animación



Fuente: Elaboración propia. Disponible en https://www.geogebra.org/m/gex8twzb

Actividad 4

4.1 Representación estática de la resta de vectores

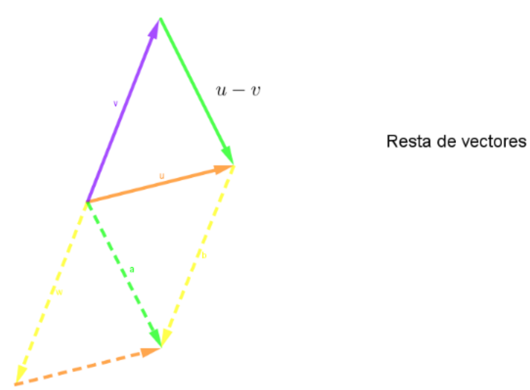
Declarar en GeoGebra

$Vector((4,1)), Vector((2,5)), enseguida - v\ , Vector((4,1),(2,-4)),$

$Vector((-2,-5),(2,-4)), u+(-v)\ \ y\ \ Vector((2,5),(4,1))$

Figura 8

Gráfica de la resta de dos vectores



Fuente: Elaboración propia.

4.2 Representación geométrica dinámica de la resta de vectores

Declarar

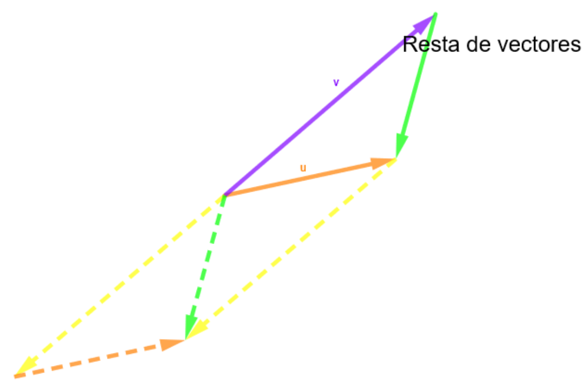
Cuatro deslizadores $a, b, c\ y\ d$

Los vectores $u = Vector((a, b))$, $v = Vector((c, d))$, $-v$, $Vector((a - c, b - d))$,

$Vector((a, b), (a - c, b - d))$, $Vector\big((-c, -d), (a - c, b - d)\big)$ y $Vector((c, d), (a, b))$.

Figura 9

Gráfica de la resta de dos vectores con animación



Fuente: Elaboración propia. Disponible en https://www.geogebra.org/m/bxd4p5hr

De manera análoga los conceptos de vector unitario, vectores paralelos, vectores ortogonales, ángulo entre vectores se representan estática y dinámicamente. De momento para vectores en el plano, pero de manera análoga este tipo de trabajo se generaliza para vectores en el espacio.

Finalmente, siguiendo la línea de trabajo propuesta, a continuación, se trabajará con un concepto del álgebra lineal: una combinación lineal en el plano.

Actividad 5

5.1 Representación geométrica estática de una combinación lineal de vectores en el plano

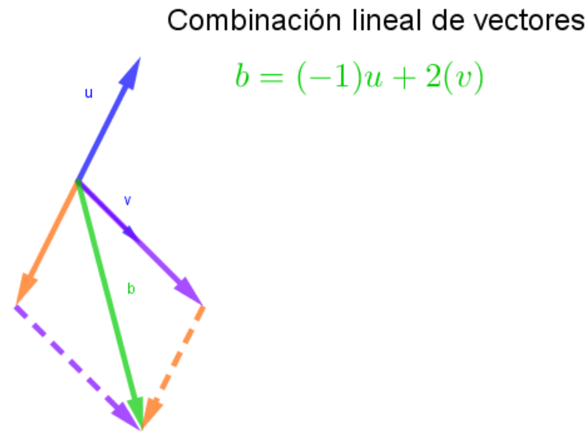
Declarar en GeoGebra

$Vector((1,2))$, $Vector((1, -1,))$, $-u$, $2 * v$, $Vector((1, -2), (1, -4))$,

$Vector((2,-2),(1,-4))\ y\ Vector((1,-4))$

Figura 10

Gráfica de la combinación lineal de dos vectores

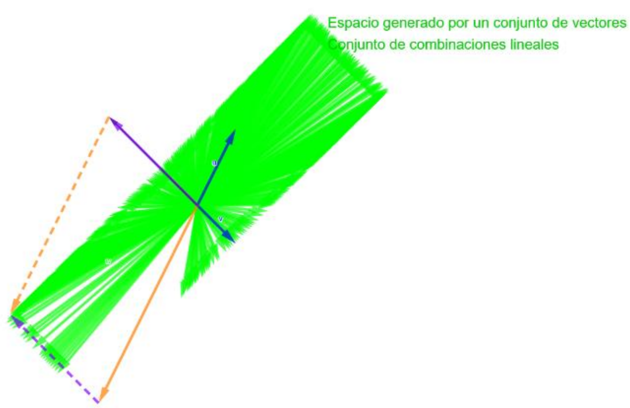


Fuente: Elaboración propia.

5.2 Representación geométrica dinámica de una combinación lineal de vectores en el plano

Figura 11

Gráfica de la combinación lineal de dos vectores con animación

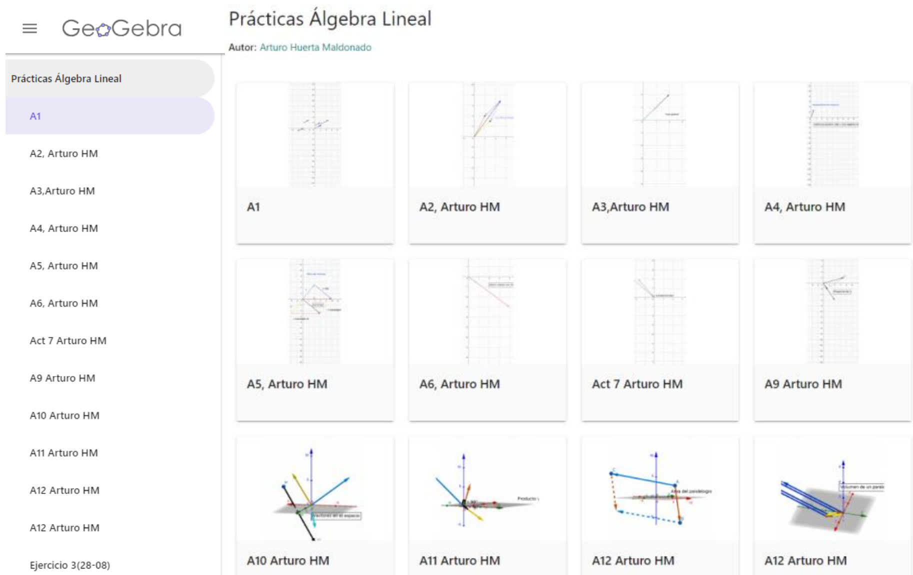


Fuente: Elaboración propia. Disponible en https://www.geogebra.org/m/apykevws

La propuesta didáctica se está llevando a cabo con 76 estudiantes del curso álgebra lineal con elementos en geometría analítica del programa académico Ingeniería en ciencias de la computación de la BUAP. Los trabajos realizados por los estudiantes Arturo Huerta Maldonado y Miguel Ángel Cruz Reyes dan una muestra.

Figura 12

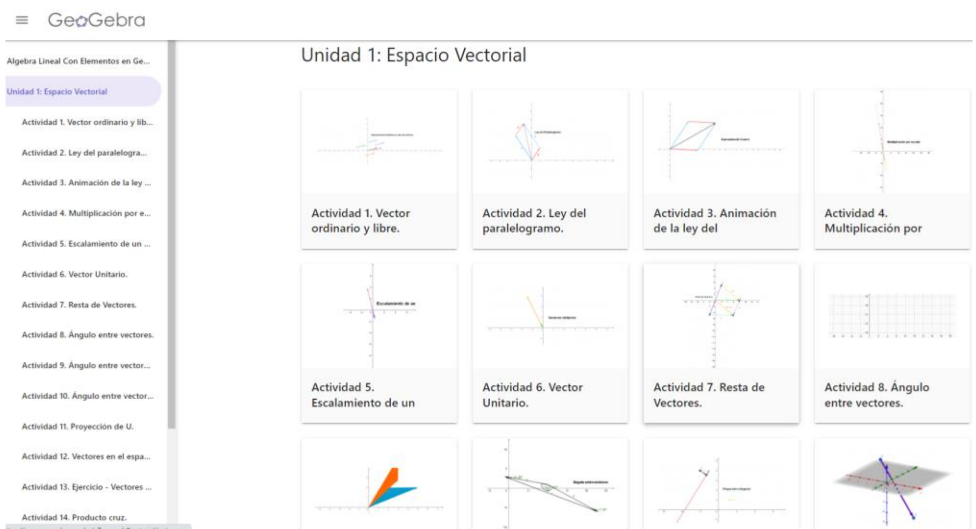
Gráfica de un libro en GeoGebra de vectores



Fuente: Elaboración propia. Disponible en el sitio https://www.geogebra.org/m/hnpymsqf

Figura 13

Gráfica de otro libro en GeoGebra de vectores



Fuente: Elaboración propia. Disponible en el sitio https://www.geogebra.org/m/e7awmasb

Conclusiones

Como fue mostrado con las actividades realizadas el sistema de geometría dinámica de GeoGebra es un recurso valioso para la elaboración de representaciones geométricas de conceptos, inicialmente estáticas, pero con la posibilidad de incluirles movimiento, si es que se incluyen parámetros, lo cual permite explorar las generalizaciones e inferir posibles resultados. Este tipo de trabajo se utilizará para más conceptos del álgebra lineal como son los conceptos de dependencia e independencia lineal, bases y sistemas de coordenadas entre otros más.

Referencias

Aytekin, C., & Kiymaz, Y. (2019). *Teaching Linear Algebra Supported by GeoGebra Visualization Environment. Acta Didactica Napocensia, 12*(2), 75–96. DOI: 10.24193/and.12.2.7.

Barabash, M. (2019). Dragging as a Geometric Construction Tool: Continuity Considerations Inspired by Students' Attempts. *Digital Experiences in Mathematics Education, 5*(2), 124–144. https://doi.org/10.1007/s40751-019-0050-2

Londoño Cano, R. A., Jaramillo López, C. M., & Esteban Duarte, P. V. (2017). Estudio comparativo entre el modelo de van-Hiele y la teoría de Pirie y Kieren. Dos alternativas para la comprensión de conceptos matemáticos. *Revista Logos Ciencia & Tecnología, 9*(2), 121–133. https://doi.org/10.22335/rlct.v9i2.451

Larson, R (Ed.). (2017). *Fundamentos del Álgebra Lineal* (8a ed.). CENGAGE.

Grossman, S. (2019). *Algebra Lineal* (8a ed.). Mc Graw Hill.